理系難関大　面接•小論文対策　　「ゆらぎ」を語る

１　ゆらぎとは

T：今日は、1/fゆらぎについて私の知る範囲で、簡単な説明を行いたいと思います。

S：まず、「ゆらぎ」とは何なのですか。

T：そうですね。まず、そこから説明しましょう。
「ゆらぎ」の研究の第一人者である、武者利光先生（東京工業大学名誉教授）の言葉によると、『ものの予測のできない空間的、時間的変化』ということだそうです。

S：それって、でたらめな運動ということですか。

T：いや、「でたらめ」ではないのです。「でたらめ」と「規則性」の間の状態という感じですね。
例えば、時間と共に変化する数字の列があったとします。
この列が、$1, 19, 100, -3, 34, 77, -24, 100, 57, 22, 4, \cdots$ というものだったら、
これはランダム（でたらめ）な列といえそうですが、
$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, \cdots$という数列だったら、これは第 n 項が
$a_n = 2n - 1$ という一般項で表される規則正しい列です。
このような規則的な数列は、項の何番目でもその値を決定することができますね。
このような列を「ランダム系」に対し「決定系」と呼ぶことにしましょう。
さて、では次の数列はどうでしょう。

$$1, 3, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 2, 3, 2, 7, 6, 5, 5, 2, 3, 4, 5, \cdots$$

この数列には全体に適用できるような規則はありませんが、ランダムというカンジでもありませんね。「前の項に対し± 1の変化を基本に、時々大きな変化も起こる」
ような数列です。このような列は「ゆらぎ」といっていいのではないでしょうか。
このような数列の特徴として、現在の状態の直後は予測できるけれど、ずっと先はどうなっているかわからないということがあります。このうな系を「ランダム系」「決定系」に対し、「複雑系」と呼ぶことにします。

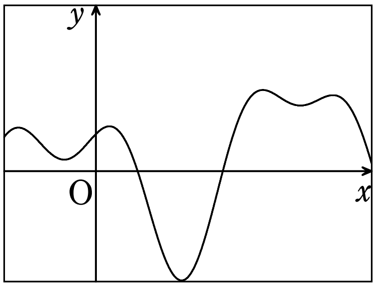
S：つまり、ゆらぎとは、
「規則性」と「意外性」が拮抗した状態といっていいのですね。
何か具体的なものを示してください。

T：一番よく例に出されるのは、そよ風ですね。そよ風は一定の強さではなく、強くなったり弱くなったりゆらいでいます。それから、小川のせせらぎとか、音楽も時間と共に音の高低や大小が変化しているので、ゆらぎと見る事もできます。
人間の心拍数や体温の変化もゆらぎの一つですね。

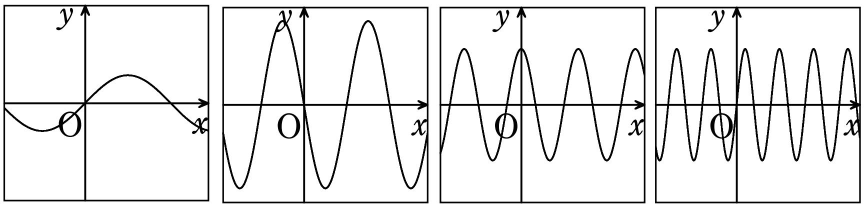
2　$\dfrac{1}{f}$ゆらぎとは

S：では、1/fゆらぎとはなんでしょうか。

T：まず、ゆらぎとは時間と共に変化するある量の状態なので、これを時間 t の関数 $f(t)$ と表すことにします。このとき、そのゆらぎに関わる要素とし「強さ（パワー）」と「周期性」に注目してみます。



例えば、時間　t と、それとともに変化する気温 $f(t)$ が次のようなグラフで表された場合、
この波は、以下の４つのサインカーブ、コサインカーブに分解できます。



$y=sin\,2\pi t$　　$y=-3sin\,4\pi t$　　$y=2cos\,6\pi t$　　$y=2sin\,10\pi t$

S：つまり、$f(x)=sin\,2\pi t-3sin\,4\pi t+2cos\,6\pi t+2sin\,10\pi t$　ということなのですね。どのようにすればこのように分解できることがわかるのですか。

T：それにはフーリエ級数の考えを用いますが、その説明は後にします。ここでおさえて欲しいことは、ある区間内で書かれたどんなグラフも三角関数の無限和によって表すことができるということです。この考えはフランスの数学者ジョージ･フーリエによって示されました。さて、そうすると、先ほどの関数は、

周期 $1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{5}$ つまり、周波数 $1,2,3,5$ の関数で表されます。

このとき、各周波数に対する波の強度をパワースペクトルといいます。

周波数を f、パワースペクトルを P としたときに、$P=\dfrac{1}{f}$ の関係が成り立つようなとき、1/fゆらぎというのです。つまり、周波数が2倍になると、パワーが半分になるということですね。

S：なんとなくわかったような気がするのですが、パワースペクトルというのはどのようにして求めるのでしょう。

T：例えば、波の強さとして、「振幅」を考えることができますね。上の例では
波の強さは順に1,3,2,2と考えることができます。
ただ、これはパワースペクトルとは少し違います。これも後でフーリエ解析のところで話しましょう。

S：少し難しいので、もっと簡単な例で説明してくれませんか。

T：そうですね。では、少し乱暴になるかもしれませんが、先日カズヒサ君と話したときの方法で説明しましょう。

３　1/fゆらぎのアバウトな説明

T：ええと。では、バスケットボールの話しをしたいと思います。

今、 A 君が、バスケットボールのフリースローを何度も行ったとします。

入ったときを○、はずしたときを×とすると、時間と共に変化する１つの系列を作ることができますね。

例えば、結果が、

○○×○×○××○○○×××○××○×○○×○○○○○×○×○××○

という結果だったとします。

これのゆらぎを調べてみます。まず、周期を無理やり導入してみましょう。

○○○…と、ずっと○が続くのを周期１とします。

また、○×○×…と、1回おきに○が起こるものを周期２とします。

次に、○××○…と2回おきに○が起こるものを周期３としましょう。

このように周期を定義すると、上の結果から、各周期ごとにその回数はどうなるでしょう。

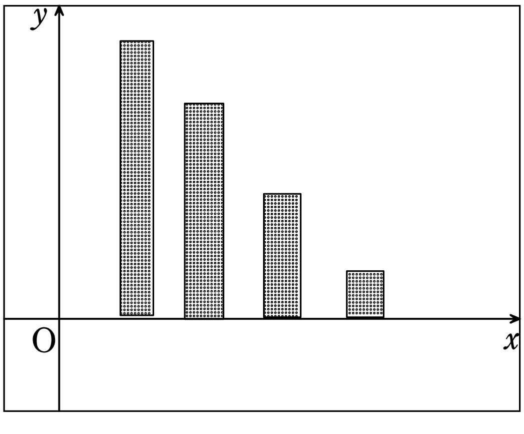
S：つまり、周期１は、○○という状態が何回起きているか調べればよいのですね。

	周期s	$\frac{1}{s}$	出現回数(P)
○○	1	1	8
○×○	2	$\frac{1}{2}$	6
○×　×○	3	$\frac{1}{3}$	3
○×　×　×○	4	$\frac{1}{4}$	1

上の表のようになりました。

T：ここで、周期s と出現回数 P をグラフに表すとどのようになりますか。

S：図の様になります。



T：先ほどあなたが作った表が、いわゆる、周波数ごとの波の強さをスペクトル分解して分析したということになります。

そして、スペクトルの強さはここでは、「出現回数」ということにしましたが、一般にはパワースペクトル密度とよばれるものを計算することになるのです。

S：なるほど。そして、そのグラフを見ると、シュートをした人の特性がわかるのですね。

T：例えば、光は波ですが、太陽の光をプリズムを通すと、赤橙黄緑青藍紫の7色に分かれますね。光の色は波長(周波数）に対応するので、プリズムで投影された色の幅の太さがその波長の強さを表しています。太陽光の場合だと、色の幅が均等になりますね。このようにスペクトルを分析することで、様々な性質を知ることができるのです。しかし、そよ風や、音などのゆらぎは、プリズムを通してスペクトル分析ができないので、周波数（振動数）と振幅を調べることでパワースペクトル密度を考えようというのです。

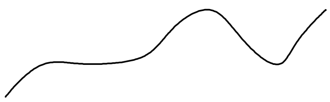
４　フーリエ級数

T：では、最後にフーリエ級数の話しをします。

先ほど少し話をしましたが、ある区間内で描かれた任意の（有界な）関数 $f(x)$ は、三角関数を用いて表すことができます。

具体的には、$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos nx+b_n sin nx)$　とあらわせます。

関数として表されなくても、例えば下図のような手書きの任意の図形だって、三角関数で表されるのです。



さて、私達は、上のようなゆらぎのグラフから、どの周期の三角関数が、どれだけの強さで入っているかということが知りたいわけです。

ということは、$f(x)$ 内における、すべての n に対しての $sin nx$ と $cos\, nx$ の係数を求める必要がでてきます。

ところで、ここで、とても素晴らしいことに、

$sin nx$ と $cos\, nx$ の係数、a_n, b_n は、なんと、次の積分によって表されてしまうのです。

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos nx\, dx \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sin\, nx\, dx$$

これをそれぞれフーリエコサイン係数、フーリエサイン係数といいます。

S：難しいですね。具体例で示してもらえませんか。

T：例えば、$f(x)=3sin\,2x+2cos x$ という関数を考えます。

今、$sin\,2x$ の係数の３を求めるには、

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sin\,2x dx$ を計算すればよいわけです。

実際、$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(3sin\ 2x\ sin\ 2x+2cos x\ sin\ 2x)dx=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi}3sin\ 2x\ sin\ 2x\ dx$

$$=\frac{6}{\pi}\int_{0}^{\pi}sin^{2}2x\,dx=\frac{6}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1-cos\ 4x}{2}dx=\frac{6}{\pi}\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}sin\ x\right]_{0}^{\pi}=3$$

となり係数３に一致しますね。

関数が不明のときも、数値のデータから区分求積の手法で積分計算していけば係数を決めることができるのです。

S：では、そうやって求めた　a_n , b_n からパワースペクトル密度はどうやって計算するんでしょうか。

T：$a_n{}^2+b_n{}^2$ を計算します。ただし、この値は、ある区間でのものですね。ですから、その区間の長さ T で割って、$\dfrac{a_n{}^2+b_n{}^2}{T}$ としておいて、$f(x)$ はゆらぎの関数なのでその区間をすぎてもまたグラフは続いていますので、また次の幅T の区間で、同じように$\dfrac{a_n{}^2+b_n{}^2}{T}$ を計算していき、それを平均したものをパワースペクトル密度とするのです。

この方法ではかなり時間がかかるので、実際はFFT（高速フーリエ変換）という手法でそれぞれの周波数に対するパワースペクトル密度を求めていきます。