これから添削をはじめるあなたに

高校において、数学を学ぶとはどういうことでしょうか。私は、その問に対して、「計算の世界から論理の世界へと向かうこと」をテーゼとして掲げてみたいと思います。

いくつかの演算や法則に従って、答えに向かってまっしぐらというのが算数的世界とすれば、「数学」で強調されるのは、「なぜそのようになるのか」、「他者が理解できるようにどう説明するか」ということを考えることではないかと思います。つまり、「計算」から「論理、論証」に向かっていくことが、算数から数学へ向かう道ではないか。

例えば、１＋１＝□のとき、□が何であるかを考えることが算数的態度、１＋□＝２のとき□を考えようとするのが数学的態度、これにより、１＋１＝２の理解はより深いものになります。

あるいは、「100 円を持って、八百屋に行って 30 円のトマトを買ったときおつりはいくらか」という問いに、「100－30=70 なので 70 円」という紋切り型の答えから、「100 円玉を出した場合、50 円玉を出した場合、・・・」と、状況を考えながら場合に分けて分類しようとするのが数学的な態度です。

もう少し高校生的な問題を示しましょう。次の問題を見てください。

【１】2 点$\mathrm{A}(-1,3)$,$\mathrm{B}(3,-3)$のとき、AB の垂直二等分線の方程式を求めよ。

恐らくあなたは次のように考えるでしょう。

AB の垂直二等分線とは「AB の中点を通り、直線 AB に垂直な直線である」

すると、AB の中点を求めること、そして、直線 AB の傾きと垂直な直線の傾きを求めることに考えが行き着くと思います。（答　$2x-3y-4=0$）

では、もしこの問題が次のようになっていたらどうでしょう。

【２】2 点$\mathrm{A}(-1,3)$,$\mathrm{B}(\square,\square)$のとき、AB の垂直二等分線の方程式は$2x-3y-4=0$である。

求める場所が違いますが、この問題は【１】と同じものであることがわかります。

すると、AB の垂直二等分線とは「AB の中点を通り、直線 AB に垂直である」という事が頭に浮かび、

①　AB の中点が$2x-3y-4=0$を通っている

②　AB と$2x-3y-4=0$が垂直に交わっている

という方針が<u>自然に</u>思いつくでしょう。

さて、では更に次のようになっていたらどうでしょう。

【３】2 点$\mathrm{A}(-1,3)$の直線 $2x-3y-4=0$に対する対称点の座標を求めよ。

これは「対称点を求める」定番問題ですね。気づいたと思いますが【１】【２】【３】は言い方や求める場所が変わっているだけで、すべて同じ問題とみることができます。そこに気づけば、【２】の①,②の問題解法の方針は、「覚えるべき」解法パターンではなく、あくまでも自然な考えであることがわかると思います。

問題の解答を作ることだけを目的化した学びの中では【１】と【３】の関連性には気づきにくいのではないかと思います。つまり、単に与えられる問題に対して、先生から教わった公式や、解き方をなぞって答えを導くというだけの勉強法では、本当の意味での「生きて働く力」、つまり、他の様々な領域にも広がり、繋がっていく数学力にはならないと私は思います。

更に言うと、時間をかけて物量的に問題をこなしていくだけでは、残念ながら数学の応用力は身につきません。問題を解く技法をマスターするだけではなく、なぜそうなるかを追求すること、逆から考えてみること、その解答が何を主張しているかを考えること、別のアプローチを験してみること、といった活動が必要です。

ただ、そのような活動は自分一人だけではできないので、適切なアドバイザーとしての教師や、共に学び合う友人の存在があると思いますし、本来それは、授業という「主体的で対話的で深い」学びの場によって磨かれるべきだと思います。

私はこの添削で、あなたに、単に解法スキルの向上や、過去問の徹底分析などではなく、数学の学びに向かうための「目」「心」「手」を培っていきたいと考えています。

「目」とは、自分でとことん考え抜くためにどういう数学的視点を持つかということ、「心」とは、興味関心を持って学びに向かい、もっと深く学びたいと思うマインドを手に入れること、そして、その上で「手」が解法スキル、テクニックです。これらが培われるためには、私が一方的に教え込むのでは、きっとうまくいかないと思います。

そうではなく、互いに対話をしながら、数学の問題を考える楽しみ、解く楽しみ、それを発信し共有する楽しみを経験することが必要と考えます。そのような中で、きっと骨太の確かな力が身につくと私は信じています。頑張りましょう！

第１回の解説

ウォーミングアップ問題１

$y = 2x^2 - 3x + 1$ の、$x = 2$ における接線の方程式を求めよ。

ウォーミングアップ問題２

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の、$x = \alpha$ における接線の方程式は $y = ax^2 + bx + c - a(x - \alpha)^2$

と表されることを説明せよ。

問題１と問題２はセットになっています。接線の方程式を、微分法から独立して、放物線と直線の位置関係によって見直して考えてもらおうと思いました。そして、単に問題を解くだけではなく、そこから「なぜ」そのような美しい形になるかという問いを駆動して欲しいという期待を込めています。

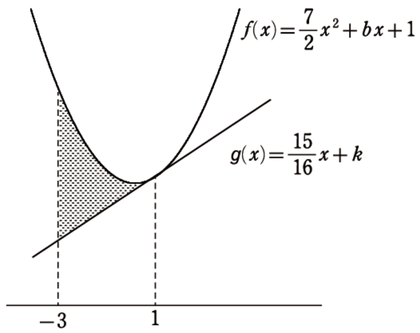
この問題から、「**差の関数による関数の組み替え**」という視点が生みだされ、以下に続く問題に発展していきます。　ではここからは、実際の解説で説明しましょう。<解説略>

ウォーミングアップ問題３

図において、$y = f(x)$ と $y = g(x)$ が、

$x = 1$ において接している。

図の打点部分の図形の面積を求めよ。



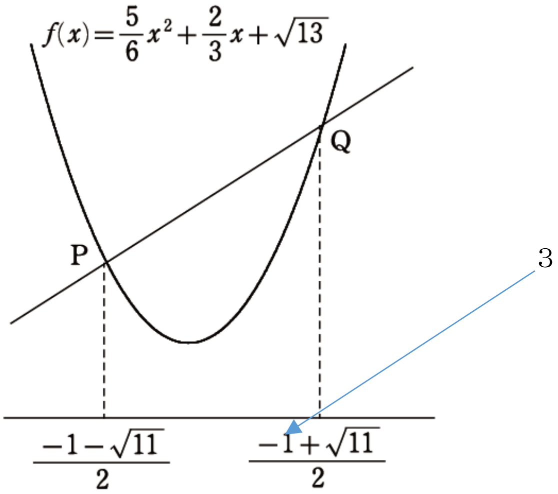
この問題は、「差の関数による関数の組み替え」の考え方の定積分への応用です。この見方ができる

と、問題解決力と数学的見方考え方がワンランクアップすると思います。

以下、解説します。＜解説略＞

ウォーミングアップ問題４

図において、2 点間の距離 PQ を求めよ。



これを解説する前に、教科書の微分法の節末問題（p. 190）を見てみましょう。

2　関数 $f(x)=x^2-x+1$ について、次の問いに答えよ。

(1)　x が a から b まで変化するときの、関数 $f(x)$ の平均変化率を求めよ。

(2)　$x=c$ における微分係数 $f'(c)$ が(1)の平均変化率に一致するとき、$c=\frac{a+b}{2}$ であることを示せ。

この問題を皆さんは何気なくやり過ごしてきたかもしれませんが、実はこれには非常に重要な数学のエッセンスが述べられているのです。この問題だけで 1 時間解説してもいいくらいです。

この問題において「微分係数 $f'(c)$ 」を 「$x=c$ における接線の傾き」、「平均変化率」を「2 点を結ぶ直線の傾き」と、図形的に意味づけをしてみると、(2)は次のような主張であることがわかります。

2 次関数の、ある 2 点を結んだ直線の傾きと同じ傾きを持つ接線が存在して、その場所の x 座標は、2 点の x 座標の中点のところにある。

これは、（理系の生徒が）数学Ⅲで習う「平均値の定理」の 2 次関数の例としてまとめることができます。

さて、このことを、微分法を用いずに、先ほど説明した「差の式による関数の組み替え」の考え方で説明しましょう。＜説明略＞

では、この考え方を用いて、ウォーミングアップ問題 4 を解いていきましょう。＜解説略＞

ここまでのまとめの問題が次の実線問題になります。では一緒に考えていきましょう。

【実践問題１】

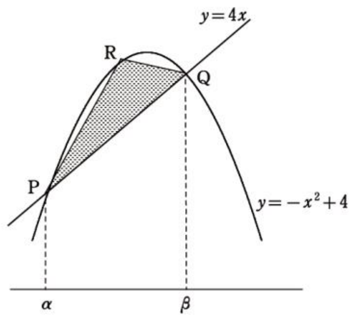
xy 平面上に、$y=-x^2+4$ で表される曲線 Cと、

$y=4x$ で表される直線 l がある。

C と l の交点をP , Q とする。

C 上の点がP から Q まで動くとき、

△PQR の面積の最大値を求めよ。



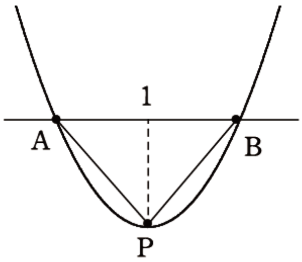
【実践問題２】

$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + px + q$ が図のように

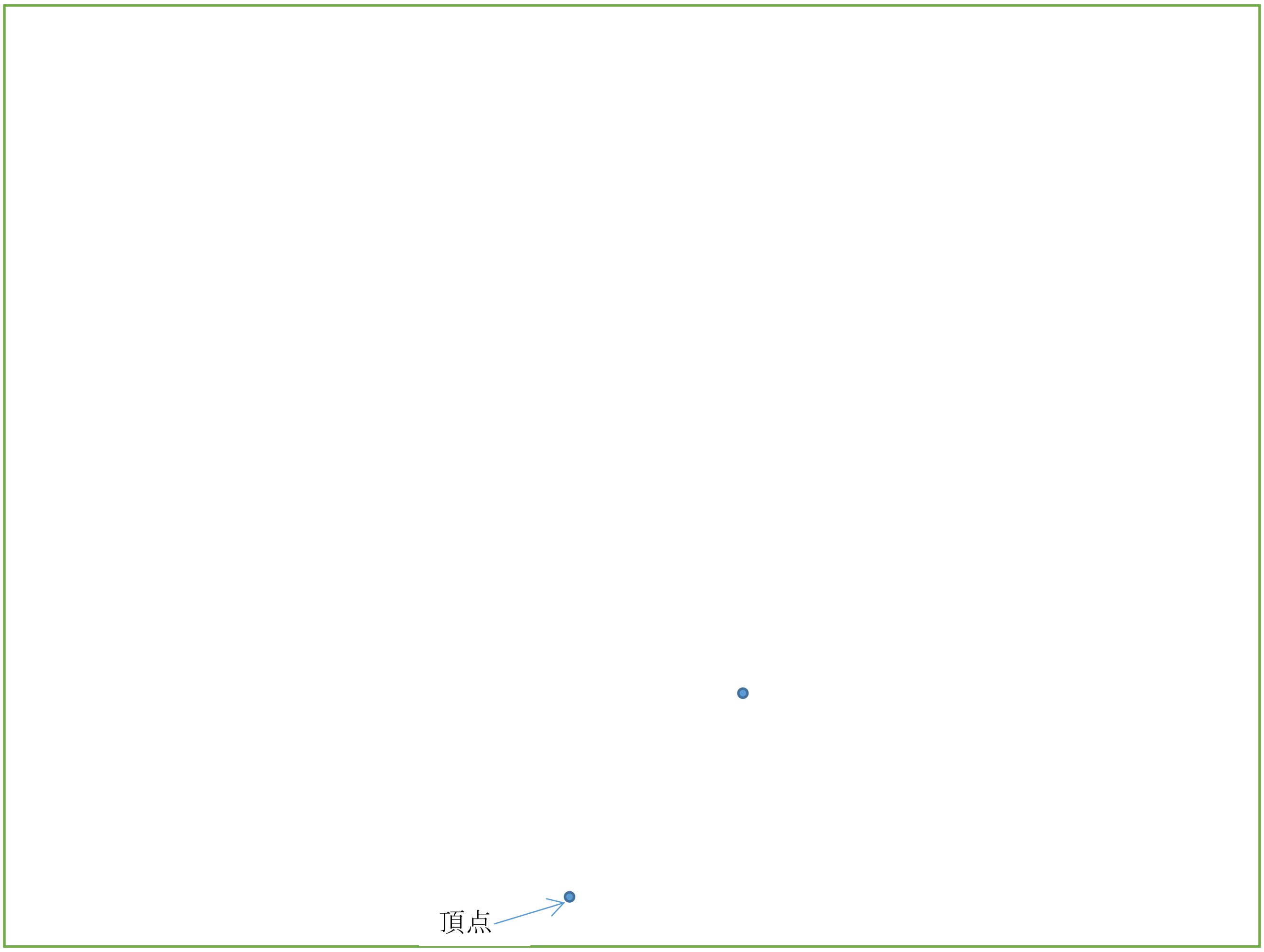
x 軸とA, B で交わっている。

頂点を P とする。

△ABP が正三角形のとき、p, q の値を求めよ。



この問題は、これまでの問題とは独立した内容です。新たな 2 次関数の性質を理解してもらうために作りました。　この問題を考える前に、次の問題を考えてみてください。



頂点ともう 1 点がわかっている 2 次関数があります。図から、どのような形になるかできるだけ正確に描画してください。

この実践問題 2 で述べたいことは、2 次関数の「2 乗に比例する性質」という非常にシンプルな性質です。この性質を用いて解いてみましょう。＜解説略＞