40　漸化式を究めよう

単元等　数学Ｂ　数列（漸化式）

◆　Contents

・漸化式から一般項

・漸化式を作る

先日は，お忙しい中にもかかわらず，丁寧なアンケート（2ヵ月後）の回答をいただきありがとうございました．

私は，授業を行われた先生に，授業の内容にちなんだ教材ネタなどの話題を提供させていただいておりますが，これは，授業者に配信するとともに，最終的には県内の先生方へ向けた資料集を作ることを意図しています．

今回は，先生からの質問に対して，私なりの考えを述べさせていただきつつ，ゆくゆくは，他の先生方へも発信していければと考えています．

漸化式から一般項

私は，漸化式の基本は次の４つとして指導していました．

＜パターン１　等差数列型漸化式＞

$a_{n+1}=a_n+d$

＜パターン２　等比数列型漸化式＞

$a_{n+1}=r\,a_n$

＜パターン３　階差数列型漸化式＞

$a_{n+1}=a_n+f(n)$

＜パターン４　1次特性方程式型漸化式＞

$a_{n+1}=pa_n+q$

パターン４はパターン２に帰着するところを強調します．センター試験レベルではこの４つをしっかりやっておけばよいと私は思います．

課外や添削，あるいは進んだグループなどに対しては次のようなものも敢えてピックアップします．

＜パターン５　逆数の数列を考えるタイプ＞

例　$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2+a_n}$

このタイプの問題は，両辺の逆数を考えたり，$b_n=\dfrac{1}{a_n}$とおく，あるいは推測して数学的帰納法により証明するなど「誘導」が入るのが普通です．なので，一般項への道筋のパターンを教えこむより，誘導にうまく乗れる（読解する）ようになることが大切だと思います．（特にここ数年のセンター試験は，技能ではなく思考の流れを見ようという意図からか，嫌になるような誘導が多く，その読解に生徒は苦労する）

＜パターン６　項上げして差分するタイプ＞

$a_{n+1}=pa_n+f(n)$

これはパターン３とパターン４の似て非なる形であることを強調しておく必要があります．この問題も誘導がつくのですが，基本的解法は「項を上げて差をとる」のが一般的です．

一例をあげておきたいと思います．

例　$a_{n+1}=3a_n+2n\ (a_1=3)$

解答

$a_{n+2}=3a_{n+1}+2(n+1)$　との差分を考えて

$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+2$

ここで，$b_n=a_{n+1}-a_n$とおくと

$b_{n+1}=3b_n+2$

変形して，$b_{n+1}+1=3(b_n+1)$

$a_2=3a_1+2=11$より　$b_1=11-3=8$

$\{b_n+1\}$は初項9公比3の等比数列となるから

$b_n=9\cdot3^{n-1}-1=3^{n+1}-1$

すなわち　$a_{n+1}-a_n=3^{n+1}-1$

<解法①>（階差数列）

よって　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(3^{k+1}-1)$（$n\geqq 2$）

$$a_n=3+\frac{9(3^{n-1}-1)}{3-1}-(n-1)$$

$$a_n=\frac{1}{2}(3^{n+1}-2n-1)$$

（$n=1$ のときも成り立つ）

<解法②>もとの漸化式を使う

$a_{n+1}=3a_n+2n$　と

$a_{n+1}-a_n=3^{n+1}-1$　から

$3a_n+2n-a_n=3^{n+1}-1$

$$\therefore a_n=\frac{1}{2}(3^{n+1}-2n-1)$$

もっと鮮やかに解くには，次のように「ＮＥＸＴを作る」方法もあります．

別解

$a_{n+1}+p(n+1)+q=3(a_n+pn+q)$

として，漸化式と比較することにより

$p=1,q=\frac{1}{2}$ を得るので

$$a_{n+1}+(n+1)+\frac{1}{2}=3\left(a_n+n+\frac{1}{2}\right)$$

すなわち$\left\{a_n+n+\frac{1}{2}\right\}$ は初項$a_1+1+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

公比 3の等比数列なので

$$a_n+n+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}\cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore a_n=\frac{1}{2}(3^{n+1}-2n-1)$$

ところで，パターン６のタイプの中で，特に$f(n)$が，等比数列型になっているものは，また別の解法があるので，それも取り上げておきます．

<パターン６’>

$$a_{n+1}=pa_n+r^n$$

このタイプの漸化式の解法として次の３つを紹介します．

例　$a_{n+1}=3a_n+2^n$　$(a_1=3)$　※

【解法その１　両辺を 2^{n+1} で割る】

※の両辺を2^{n+1}で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$$

ここで，$b_n=\frac{a_n}{2^n}$ とおくと，

$$b_{n+1}=\frac{3}{2}b_n+\frac{1}{2}$$

（1次特性方程式型漸化式に帰着）

この式を変形して

$$b_{n+1}+1=\frac{3}{2}(b_n+1)$$

よって，$\{b_n+1\}$ は初項 $b_1+1=\frac{5}{2}$

公比$\frac{3}{2}$ の等比数列なので

$$b_n+1=\frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\qquad \therefore b_n=\frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1$$

よってa_nを求めると　$a_n=5\cdot 3^{n-1}-2^n$　答

【解法その２　両辺を 3^{n+1} で割る】

※の両辺を3^{n+1}で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

ここで，$b_n=\frac{a_n}{3^n}$ とおくと，

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

（階差数列型漸化式に帰着）

よって，$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k$（$n\geqq 2$）

$$b_n=1+\frac{\frac{2}{9}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{5}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

（$n=1$のときも成立）

よってa_nを求めると　$a_n=5\cdot 3^{n-1}-2^n$　答

解法１は$\frac{a_n}{2^n}$で, 解法２は$\frac{a_n}{3^n}$でシンクロさせるところがポイントです．これも誘導型なので，どちらの解法も示しておくことが必要ではないかと思います．また，答えを速く出すためには，次のような裏技的手法もあります．

【解法その３　$f(n)$ を消去する】

$$a_{n+2}=3a_{n+1}+2^{n+1}$$
$$2a_{n+1}=6a_n+2^{n+1}$$

$a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$

$\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項$a_2-2a_1=11-6=5$

公比3の等比数列なので

$a_{n+1}-2a_n=5\cdot3^{n-1}$

※より　$3a_n+2^n-2a_n=5\cdot3^{n-1}$

よって　$a_n=5\cdot3^{n-1}-2^n$　答

ポイントは項上げして※を２倍したものとの差分を考えて，邪魔者を消しているところです．

ところで，その３の解法をよく見ると

$a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$

すなわち漸化式　$a_{n+1}=3a_n+2^n$　は

$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$ という隣接3項間漸化式に帰着していることがわかります．

そこで，次に隣接３項間漸化式の解法について考えておきましょう．

＜パターン７　隣接３項間漸化式＞

$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$

隣接３項間漸化式は，センター試験や文系では出されないという定説がありましたが，2011 年のセンターに出題されました．

多くの先生方は次のように指導しているのではないかと思います．

例　$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n\,(a_1=5,a_2=13)$　※

解答

特性方程式　$x^2-5x+6=0$ を解いて

$x=2,3$

このことより※を変形すると

（注　上記部分は答案に書かない）

$a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$　①

$a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)$　②

①より$\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項$a_2-2a_1=3$

公比３の等比数列なので

$a_{n+1}-2a_n=3^n$　③

②より$\{a_{n+1}-3a_n\}$ は初項$a_2-3a_1=-2$

公比２の等比数列なので

$a_{n+1}-3a_n=-2^n$　④

③－④より　$a_n=2^n+3^n$　答

普通は，特性方程式の解に１が含まれる形になるので，階差数列に持っていくのが一般的な解法になります（2011 年のセンターもそうです）．

ところで，隣接３項間漸化式は次のような裏技があります．

$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$　において

$a_n=r^n$ とすると，

$r^{n+2}-5r^{n+1}+6r^n=0$

$r^2-5r+6=0$　$\therefore r=2,3$

すなわち，$2^n,3^n$ は漸化式を満たす特殊解なので，一般解は

$a_n=k\cdot2^{n-1}+l\cdot3^{n-1}$ とおける

$a_1=5,a_2=13$ から$k=l=1$なので

$a_n=2^n+3^n$ 答

これは，２階の同次線形微分方程式のアナロジーです．

$y''=5y'-6y$

視察より，特殊解はe^{2x},e^{3x}

よって一般解は

$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

つまり，漸化式 $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$ を満たす一般項全体の集合は，2^n と 3^n を基底とする（自由度２の）線形空間になっているわけです．

難しい考えに見えますが，微分方程式のアナロジーを使えば，様々な漸化式が簡単に求まります．

例1　$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$　$a_1=1, a_2=3$

解答　$a_n=r^n$ とすると$r=1, 2$ なので

$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$　の一般解は

$a_n=k\,2^{n-1}+l$

$a_1=1, a_2=2$ より　$k=2, l=-1$

よって$a_n=2^n-1$

非同次型の場合も，同次型の一般解と非同次型の特殊解の結合を考えれば良い.

例2　$a_{n+1}=2a_n+3$　$(a_1=1)$　※

解答　同次型　$a_{n+1}=2a_n$の一般解は

$a_n=k\,2^{n-1}$

また，$a_n=\alpha$ として漸化式に代入すると

$\alpha=-3$

つまり，$a_n=-3$ は※の特殊解

よって，$a_n=k\,2^{n-1}-3$

$a_1=1$ より　$k=4$

$\therefore a_n=2^{n+1}-3$　答

上記のような解法は，生徒に教えるというわけにはいきませんが，一般項を決定する簡便法，あるいは，大学で微分方程式を学ぶ準備として，指導者の側が意識しておいても良いかもしれません.

以上で，漸化式の代表的な７パターンを紹介しましたが，その他として，以下のようなものがあります.

①　積のかたまりのタイプ

②　連立漸化式

③　隣接しない項における漸化式

④　和と一般項がからむ

①の例

例1　対数を考える

$2{a_n}^3={a_{n-1}}^4$　$(a_n>0)$

両辺に底を２とする対数をとると

$1+3\log_2 a_n=4\log_2 a_{n-1}$

ここで，$b_n=\log_2 a_n$ とおくと

$b_n=\dfrac{4}{3}b_{n-1}-\dfrac{1}{3}$ となり

パターン４に帰着（以下略）

例2　降下させる

$a_{n+1}=na_n$ $(a_1=1)$

$a_n=(n-1)a_{n-1}$

$a_{n-1}=(n-2)a_{n-2}$

……………………

$a_3=2a_2$

$a_2=1\cdot a_1$

辺々かけて

$a_n=(n-1)!$

②の例

例3　$\begin{cases} x_{n+1}=2x_n+y_n \cdots ① \\ y_{n+1}=x_n+2y_n \cdots ② \end{cases}$

$(x_1=1, y_1=5)$

①より$y_n=x_{n+1}-2x_n$

$y_{n+1}=x_{n+2}-2x_{n+1}$

②に入れて

$x_{n+2}-4x_{n+1}+3x_n=0$

隣接３項間漸化式に帰着（以下略）

③の例

例4　$a_{n+2}=a_n+3$（$a_1=1, a_2=2$）

のとき，$\sum_{k=1}^{30} a_k$ を求めよ.

＜筋で考える＞

奇数項は初項１公差３の等差数列

偶数項は初項２公差３の等差数列

それぞれ15項までの和を求めて加える

＜束で考える＞

２つずつの束で考えると，求める和は

初項３公差６の等差数列の15項までの和

（以下略）

④の例

例5　$S_n=-a_n+2n-7$　のとき

a_nを求めよ.

和から一般項の式

$a_n=S_n-S_{n-1}\,(n\geqq 2), S_1=a_1$ を

用いて，a_n かS_n だけの漸化式にする

（解略）

---

③と④はセンター試験要注意の問題ではないかと思います.

漸化式を作る

漸化式の指導の場面では，与えられた漸化式から一般項を導く技能を磨くことに力点を置きがちになりますが，それとともに，**漸化式を作る**過程も身につけさせるべきだと思います．それが今流行りの「思考を問う」試験への対応にもなります．

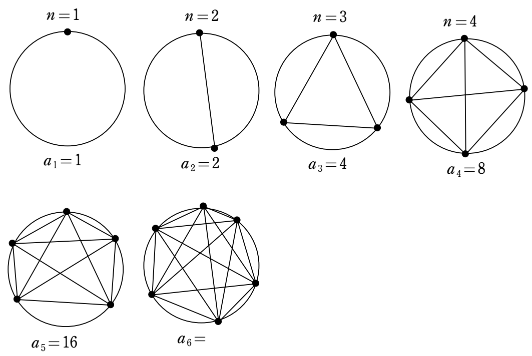
我々が，ある時系列によって変化する現象の法則を一般化する際，例えば，1, 3, 5, 7 という数列から，$a_n = 2n-1$とするように，いくつかの値から帰納的に類推するという手段があります．

しかし，いつでも簡単に類推できるとは限りません．また，いくつかの項だけから，一般化することの危険性もあります．

例えば，円周上に点をとり，線分によって円がいくつの部分に分割されるかを考えてみます．（ただし３つの線分が１点で交わらないように点を配置する）

すると，点が１～5 個までの場合は

1, 2, 4, 8, 16　と等比数列的に変化していますが，6 個以上になるとその法則が破れます．



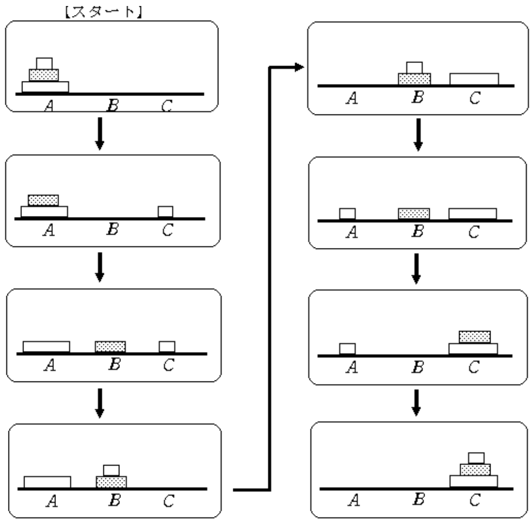
ちなみに点の数が 6 個のときはどんなに考えても 32 個にはなりません．

一般項がすぐ求められない現象に対して，変化の推移，すなわち現在の状態から一歩先の状況を調べることが，漸化式を作るということになります．これは，関数における，変化率を調べてグラフの全体状況を把握するという，微分方程式の考えに近いものがあると思います．

従って，**漸化式→一般項**　に習熟するだけではなく，**現象→漸化式の立式**　という過程も大事にしたいところです．

では最後に，漸化式を作る典型的な問題として，ハノイの塔について触れておきたいと思います．

ハノイの塔とは，３つのバーに何枚かの円板が重ねてあって，それを１枚ずつ動かして，別のバーに移動するというパズルです．ルールは，小さい円板の上に大きい円板を移動させてはならないというものです．円板が３枚の場合の移動手順を以下に示します．



円板が３枚の場合は，7 手かかることがわかります．では，円板がn枚の場合は，何手かかるかということを考えてみます．

枚数を１枚ずつ増やして，生徒に試行錯誤させてみると，だんだん，漸化式の考えに到達していくようになります．

つまり，4 枚の場合は，とりあえず３枚をＢに移動し（7 手），一番大きな円板をＣに移動し（１手），Ｂの３枚の円板をＣに移す（７手）から，15 手であることがわかります．よって，n枚の場合は，$n-1$枚をＢに移し（a_{n-1}手），一番大きな円板をＣに移し（1 手），そして，ＢからＣに$n-1$枚を移す（a_{n-1}手）ことから，$a_n = 2a_{n-1} + 1$（$a_1 = 1$）という漸化式が出来上がります．

COFFEE　BREAK 22

クロスワードパズル

有数のパズリストでもある高校の数学の先生に中原克芳先生（広島女学院高校）という方がいます．彼からいただいたクロスワードパズルを紹介しましょう．

このクロスワードパズルは，２つの顔を持ちます．つまり，どの場所も答えが２つ以上あるのです．２種類の解を完成させてください．

■	①		② が	く	■
③		■		■	④
■	⑤ ど		■	⑥	く
⑦	け	■	⑧		り
⑨ た	い		う	■	つ

■	①		② が	く	■
③		■		■	④
■	⑤ ど		■	⑥	く
⑦	け	■	⑧		り
⑨ た	い		う	■	つ

タテの鍵

① 残念ながらこれでは時刻はわかりません．

② 絵から連想するもの．

④ ２個のサイコロを転がします．

⑥ 体の一部です．

⑦ これも体の一部．

⑧ 羊飼いは羊を○○．

ヨコの鍵

① 学校で習います

③ わが子ももう幼稚園．最近大分○○が読めるようになってきました．

⑤ 「○○？」これ一語で文になります．

⑥ しりぞくこと．

⑦ 勝負にはつきものです．

⑧ とても美しく，見る者を和ませてくれます．

※　解答は COFFEE　BREAK 23 で