32　３次方程式の解の公式を展望する

単元等　数学Ⅱ　微分法（3 次方程式）

◆Contents

・3 次方程式の判別式

・3 次方程式の解の公式

1　授業の内容

(1)　2 次方程式の解をグラフから説明

(2)　3 次方程式への応用（定数分離）

2　授業を見ての所感

先日は個別訪問で授業を見せていただきありがとうございました．まず，数学科全員が互いの授業を見せ合い，授業研究会も午前と午後 2 度行うなど非常にしっかりした教科の研修体制が築かれていることに大いに感銘を受けました．授業力の向上と，教師としての資質を高める取り組みを，学校経営の中にしっかり位置づけていることがとてもよくわかりました．

先生の授業は 3 年生で，進路もほぼ決定している状況であるにもかかわらず，非常に集中して，しっかりと取り組んでおりました．また，挨拶などもしっかりしてとても爽やかな生徒たちでした．日頃から先生と生徒がよい関係を築かれていることによるものだと思います．

今回の授業は，先生が終始笑顔で気持ちよさそうに授業を展開していたことが印象的でした．

また，3 次方程式に入る前に，2 次方程式で概念の説明を行っていたことや，丁寧な言葉遣いで，テンポの良い説明をこころがけていたことなどがとても良かったと思いました．

3　補足すること

私は，個別訪問を行った先生方に対し，その授業に関連する内容についての教材研究ネタなどの話題を提供させてもらっています．

ゆくゆくは，教材研究集としてまとめようと思っています．

先生の行った授業は，３次方程式の解の個数を，

①　定数を分離させる

②　左辺（３次関数）と右辺（直線）のグラフの交点の個数を調べる

という内容でした．

つまり，３次方程式は，２次方程式のように解の公式や判別式が無い（習わない）ので，グラフに頼るということを行っているわけですね．

さて，そこで今回は，授業の内容とは少しかけ離れるのですが，３次方程式の解の公式や判別式について高校の視点に立って少し考えてみたいと思います．

３次方程式の判別式

２次方程式　$ax^2+bx+c=0$ は，両辺を a で割ることで，$x^2+bx+c=0$（※）の形にすることができるので，以下この形で考えることにします（モニックな形と言う）．

この方程式の判別式は，$D=b^2-4c$ となり，

$D>0$ のとき(※)は異なる２つの実数解を持つ

$D=0$ のとき(※)は実数の重解を持つ

$D<0$ のとき(※)は異なる２つの虚数解を持つ

と分類されます．

ところで，(※) の２つの解をα，βとすると，解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-b, \alpha\beta=c$　なので，

$D=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2$　となります．

このように判別式を $D=(\alpha-\beta)^2$ とした方が，意味が見えてきます．

つまり，αとβが異なる実数ならば，その差の２乗はいつでも正になるし，２つが等しければその差は０なので，$D=0$になることは明らかです．

αとβがともに虚数解のときは，２つの解は互いに共役（$p+qi, p-qi$の形）なので，その差は純虚数（$2qi$）の形になるので，２乗すれば，$i^2=-1<0$なので，$D<0$となることが納得できます．

では，このような考え方で３次方程式の判別式を考えてみたいと思います．３次関数のグラフは，xが非常に大きいときは，無限に大きくなっていくし，逆に，xをどんどん小さくすると，マイナス無限大に向かっていきます．つまり，３次関数は，少なくとも１か所以上x軸と交わることがわかります．このことから，次のことが言えます．

３次方程式は少なくとも１つの実数解を持つ

すると，３次方程式は，１次式と２次式に因数分解されるので，解は次のように分類されます．

①　異なる３つの実数解を持つ

②　重解を持つ

（２つ同じ場合と３つとも同じ場合）

③　１つの実数解と２つの異なる虚数解を持つ

３つの虚数解を持つとか，２つの実数解と１つの虚数解を持つというのは有り得ないことは明らかですね．

ここで，３次方程式の３つの解をα，β，γとすると，判別式は，次のような形になっていればよいことがわかります．

$$D=(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$$

①の場合は$D>0$，②の場合は$D=0$となりますね．③の場合が少し面倒ですが，今，αを実数解，βとγを虚数解とし，$\beta=p+qi, \gamma=p-qi$とすると，$\alpha-\beta=(\alpha-p)-qi$，$\alpha-\gamma=(\alpha-p)+qi$と互いに共役な複素数になります．従って，

$(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)=$実数　となり，

$(\alpha-\beta)^2(\gamma-\alpha)^2>0$がわかります．

一方，β−γは純虚数なので，$(\beta-\gamma)^2<0$がわかります．

以上から，③のときは，$D<0$となり，無事に解の個数と種類を判別することができました．

では，３次方程式の判別式

$$D=(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$$　を，

方程式の各係数を用いて表すにはどうすればよいのでしょうか．

まず，そのことを考える前に，３次方程式の一般形について触れておきたいと思います．

３次方程式は，$ax^3+bx^2+cx+d=0$とかけるのですが，両辺をaで割って，モニックな形

$x^3+bx^2+cx+d=0$とします．これで係数の文字が１つ減りました．

次に，３次関数の点対称性を利用して更に簡単にします．

$x^3+bx^2+cx+d=0$　において，

$x=t-\dfrac{b}{3}$ と変数変換します．

$$\left(t-\frac{b}{3}\right)^3+b\left(t-\frac{b}{3}\right)^2+c\left(t-\frac{b}{3}\right)+d=0$$

$$t^3-\left(\frac{b^2}{3}-c\right)t+d-\frac{bc}{3}-\frac{b^3}{27}=0$$

tの2次の項が消えました．

つまり，$x^3+Ax+B=0$とおけば，この方程式が解ければ，その解から$\dfrac{b}{3}$を引けば，

$x^3+bx^2+cx+d=0$の解も得られることがわかります．そこで，これから判別式を考える３次方程式を$x^3+ax+b=0$とすることにします．

では，この方程式の判別式を求めてみましょう．

$f(x)=x^3+ax+b$　とします．

方程式$f(x)=0$の３つの解をα，β，γとすると，

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$おけます．

この両辺を x で微分すると，

$$f'(x)=3x^2+a$$
$$=(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\beta)(x-\gamma)$$
$$+(x-\gamma)(x-\alpha)$$

よって

$$f'(\alpha)=3\alpha^2+a=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)$$
$$f'(\beta)=3\beta^2+a=(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)$$
$$f'(\gamma)=3\gamma^2+a=(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$$

この式を辺々かけると

左辺 $=(3\alpha^2+a)(3\beta^2+a)(3\gamma^2+a)$

右辺 $=-(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2=-D$

が得られます．

左辺を更に計算すると

左辺 $=27\alpha^2\beta^2\gamma^2+9a(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)$
$+3a^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+a^3$

ここで解と係数の関係より

$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=a$, $\alpha\beta\gamma=-b$

よって

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$
$$=-2a$$
$$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2$$
$$-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=a^2$$

なので

左辺 $=27b^2+9a^3-6a^3+a^3=27b^2+4a^3$

よって　$D=-(27b^2+4a^3)$

めでたく判別式が得られました．とてもシンプルな式で表現されています．

では，一つ例をやってみましょう．

例　$x^3-2x+1=0$ の解を判別せよ．

$D=-27\times1-4\times(-8)$
$=-27+32=5>0$

よって，異なる３つの実数解を持つ．

３次方程式の解の公式

ではいよいよ，３次方程式　$x^3+ax+b=0$ の解の公式に挑戦してみましょう．

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

という有名な因数分解を利用します．

この式で，a を x と思うと，

$$x^3-3bcx+b^3+c^3$$
$$=(x+b+c)\{x^2-(b+c)x+b^2+c^2-bc\}$$

つまり，x^3 －☆ x ＋△＝０という形の３次方程式は，上の因数分解を利用して解けることがわかります．

さて，$x^2-(b+c)x+b^2+c^2-bc$ の因数分解を行うと，$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ を用いて

$$x^2-(b+c)x+b^2+c^2-bc$$
$$=(x+b\omega+c\omega^2)(x+b\omega^2+c\omega)$$

とできます．（解の公式を利用する）

以上から，3 次方程式　$x^3-3bcx+b^3+c^3=0$ の解は

$$x=-b-c,-b\omega^2-c\omega,-b\omega-c\omega^2$$

であることがわかります．

【例題】 $x^3-6x+6=0$ を解け

左辺を $x^3-3bcx+b^3+c^3$ と比較して，

$$\begin{cases}bc=2\\ b^3+c^3=6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b^3c^3=8\\ b^3+c^3=6\end{cases}$$

b^3,c^3 は 2 次方程式 $t^2-6t+8=0$　の解である．

$(t-2)(t-4)=0$　より $t=2,4$

ここで，$b<c$ と考えても一般性は失わないので

$b^3=2,c^3=4$　つまり，$b=\sqrt[3]{2},c=\sqrt[3]{4}$

よって，$x^3-6x+6=0$ の解は

$$x=-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4},-\sqrt[3]{2}\omega-\sqrt[3]{4}\omega^2,-\sqrt[3]{2}\omega^2-\sqrt[3]{4}\omega$$

COFFEE　BREAK 18

高校生クイズの問題①

昔，高校生クイズをテレビで見ていたら，数学オリンピックの問題ということで，次のような問題が出題されていた．

> サイコロを 6 回振る．何回目かに，それまでに出た目の総和が 6 となる確率を求めよ．

● 一般的な解法

① 1回目に6となるのは、6が出ればいいので確率は $\dfrac{1}{6}$

② 2回目に6となるのは、$(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)$ の5通りなので確率は $5\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^2$

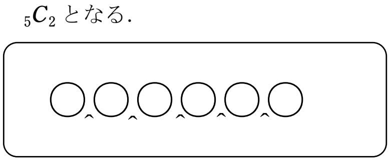
③ 3回目に6となるのは,
$(1,1,4)$…3通り $(1,2,3)$…6通り $(2,2,2)$…1通り
全部で10通りなので，確率は $10\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^3$

④ 4回目に6となるのは,
$(1,1,1,3)$…4通り $(1,1,2,2)$…6通り
全部で10通りなので，確率は $10\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^4$

⑤ 5回目に6となるのは、$(1,1,1,1,2)$…5通り
確率は $5\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^5$

⑥ 6回目に6となるのは、$(1,1,1,1,1,1)$ の1通りなので
確率は $\left(\dfrac{1}{6}\right)^6$

参考 例えば，3回目に6となる場合の数は，6を3つの自然数の和に分割する方法の数を考えればよい．
つまり，下図の様に，6個の〇の隙間に２つの「仕切り」を入れる方法を考えればよいので，
${}_5C_2$ となる．



①～⑥は同時に起こることはないので,
以上から求める確率を Pとすると,

$$P=\frac{1}{6}+5\left(\frac{1}{6}\right)^2+10\left(\frac{1}{6}\right)^3+10\left(\frac{1}{6}\right)^4+5\left(\frac{1}{6}\right)^5+\left(\frac{1}{6}\right)^6$$

$$=\frac{1}{6}\left\{1+5\left(\frac{1}{6}\right)+10\left(\frac{1}{6}\right)^2+10\left(\frac{1}{6}\right)^3+5\left(\frac{1}{6}\right)^4+\left(\frac{1}{6}\right)^5\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{6}\right)^5$$

(注 2項定理 $(1+x)^5=1+5x+10x^2+5x^3+x^4$ を利用)

$$=\frac{7^5}{6^6}$$

ここで、$6^6=(2\times3)^6=2^6\times3^6=64\times9^3=64\times729=46656$

$7^5=7^2\times7^2\times7=(50-1)^2\times7=2401\times7=16807$

なので $P=\dfrac{16807}{46656}$ 答

● 拡張する

サイコロだと目が6個なので，これを n に拡張する．
つまり次のような問題にしてみる．

> 1 から n までの番号が書かれた n 枚のカードある．このカードから1枚抜き取り，それに書かれている数字を記録し，そのカードをもとに戻す．このような操作を n 回行うとき，それまでに記録した数の総和が n となる確率を求めよ．ただし$n\geqq2$ とする．

前問と同様に考えると，求める確率は

$$P=\frac{1}{n}+{}_{n-1}C_1\left(\frac{1}{n}\right)^2+{}_{n-1}C_2\left(\frac{1}{n}\right)^3+{}_{n-1}C_3\left(\frac{1}{n}\right)^4+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=\frac{1}{n}\left\{1+{}_{n-1}C_1\left(\frac{1}{n}\right)+{}_{n-1}C_2\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

さて，ここで， $n\to\infty$ のとき， P はどうなるだろうか．
P を次のように変形する．

$$P=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ なので,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}P=0\times e=0$ となる．

(または $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1)P=e$ としても面白い)

COFFEE　BREAK 19 に続く・・・