24　円の等幅性

単元等　数学Ⅱ　図形と式（円の方程式）

◆Contents

・円の方程式の導き方

・等幅曲線（ルーローの三角形）

・座標平面上に円を図示する

1　授業の内容

(1)導入（図形を式に表す）

(2)円の方程式を導く

(3)練習問題とまとめ

2　授業を見ての所感

授業全体を通しての印象

先生の穏やかな口調による丁寧な説明．そして，時に，本質を突いた鋭い指摘や話題など，さすがと思える授業でした．

冒頭に，「図形を式に表し，計算によってその図形の性質を調べることができる」「円という図形を何とか式にしたい」「式にすることの良さ」といった，本時の学習課題と生徒への動機づけを明確にして授業に入りました．

多くの授業が「いきなり教科書の公式を示して問題を解く」という流れに終始している現状の中で，先生の授業は特に若い先生方に見習って欲しいと感じました．

円の方程式を導く過程では

「円とは，ある点からの距離が一定である点の集まり」という自然な定義から，

「中心から同じ距離にある点のあつまり」

とまとめ，生徒に作図などの数学的活動を行いつつ，「中心」「半径」「動点」を媒介にして

$$CP = r$$

という定式化を目指すという流れはとてもわかりやすかったと思います．

中心→Center →$C(a,b)$

動点→Point→ $P(x,y)$

と生徒に英語で答えさせる場面も良かったですね（ちなみに，半径は Radius　の r）．

円の性質について「余談」としながらも，対称性や等幅性に触れ，特にマンホールの蓋はなぜまるいか，という部分では，生徒の顔色が変わったと思います．

そして，「本時の心臓部分」と先生が指摘された公式を生徒に作らせる場面では，「教科書はまっすぐに進んで読むものではない．わからなくなったら何度も戻って確認することが必要」というとても重要な指摘がなされました（小説は 1 冊読み終えればそれで終わりだけれど，数学の本は何回も新鮮な気持ちで読める本ということで，コストパフォーマンスが良い！）．

計算が苦しい生徒もいましたが，机間巡視の中で，そのような生徒へのフォローもしっかり行い，最終的に生徒達全員が

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$　を獲得できたのではないかと思います．

授業の終わりに指名した生徒が，本時にわかったこととして，

「円のような図形も，中心と半径を基にして方程式で表すことができる」ときれいにまとめたのには驚きました．

また，自分の今日の授業は何点だったかを生徒に評価させる場面もあり，先生は，今回我々が来るということで，かなり気を使って授業を行っていただいたことが痛いほどわかりました．

ありがとうございました．

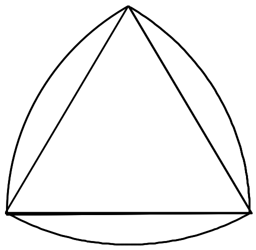
3　補足すること

私からは，特に授業に対する注文ということではなく，先生も御存じのものあるかもしれませんが，教材研究ネタなどを少しお話させていただきたいと思います．

等幅曲線

「マンホールの蓋はなぜ丸い」は歴史的な問題ですが，最近ではマイクロソフト社やグーグルの採用試験に出たこともあるようです．

この話題とセットになるものとして，ルーローの三角形(Reuleaux Triangle)が有名です．



これも円と同様等幅曲線で，北海道にある秋山仁の数学館にはタイヤがルーローの三角形になっている車が展示されています．

こんな車があってもあまり実用性はないと思いますが，ルーローの三角形自体は，ロータリーエンジンや，四角に穴をあけるドリルなどに応用されています．

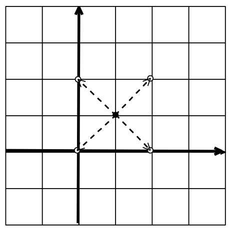
ところで，自動販売機でコインがスムーズに流れるのは円の等幅性を利用しているわけですが，外国の硬貨は円だけではなく 8 角形など様々な形になっています．でもよく見ると，等幅性を確保しようとルーローの三角形のような処理がされています（円弧で膨らみをつける）．でも，自販機では面倒そうだなあと私は思うのですが・・・．
どうなんでしょう．

座標平面に円を図示する

山田先生から，式で表された円を図示する場面もあってよいのではという指摘がありました．それは，いずれ後で行うことになるわけですが，その円の図示に関して少し思うことを述べたいと思います．

例えば，$(x-1)^2+(y-1)^2=2$ という円を座標平面上に図示する場合，「中心が $(1,1)$ で半径が $\sqrt{2}$」と見ると，$\sqrt{2}$ の大きさがイメージできなくてうまく描けないことがあります．

むしろ，「中心が $(1,1)$ で原点などを通る円」と見るとスムーズに描けます．つまり，図のように，中心をとったら，まわりの 4 点を決めてそれをガイドに円を作る作戦です．



ピタゴラスの定理

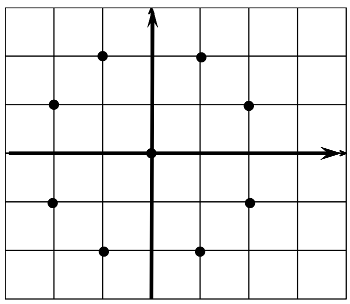
$1^2+1^2=2$

を使っているわけです．

円の方程式を見ると，半径が $\sqrt{5},\sqrt{10},\sqrt{13}$ であるものが結構多いことがわかります．それらを図示するときは，それぞれ

$1^2+2^2=5$　$1^2+3^2=10$　$2^2+3^2=13$

とすれば上手く描けて，更に，接線を引いた時の接点の座標などもうまくわかったりすることがあり便利です．



例えば $x^2+y^2=5$ の場合

中心を原点にとった後，$1^2+2^2=5$ に着目して図の 8 個の点を決めてから円を描く．