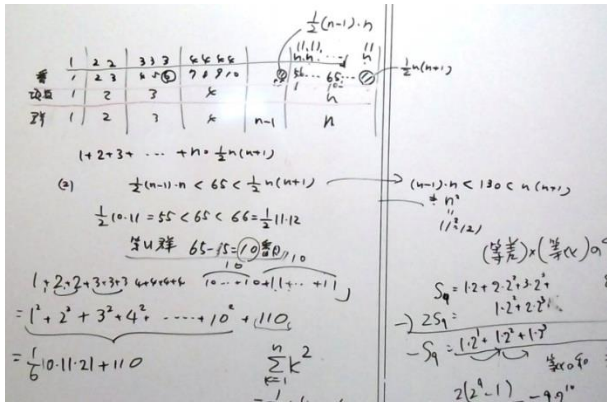
盛岡三高数学科通信
How do you solve ?
How do you teach ?

第9号
発行責任者
盛岡第三高等学校
下町壽男

> 次のような，第 n 群に n が n 個並ぶような群数列を考える．
> 　1|22|333|4444|55555|・・・・・・・・
> このとき，65 番目の数は何群の何番目か．また 65 番目までの総和を求めよ．

今回は群数列をテーマに取り上げてみることにしました．というのは，少し古い話ですが，1 期末考査前に，群数列の問題がわからないといって，こぞって職員室に質問に来る生徒が見られたからです．

下の写真は，期末考査前に，ある先生が，質問に来た生徒にホワイトボードで解説したものと思われます．



私は，6 月の指導主事による個別訪問の研究会で言ったことを繰り返したいと思います．

それは，なぜ，多くの先生は簡単なことを難しく教える方向で指導するのだろうということです．

きつい言い方ですが，写真のような解法で指導しても，生徒には納得感や成就感が生まれるとは思えません．

なぜなら，これは「一つの解法の記述の理解」という指導にすぎず，決して解を得るために探究していく方向での指導ではないからです．

確かに，数学の良さの一つは，公式化や解法のパッケージ化をすることです．そうすることで，意味，概念や，もっといえば考えることさえも放棄して，「手で解く」ことができるということです．

しかし，最初からそのような便利な手順を用意してそれをなぞるような指導をすることは本末転倒であり，深い学びに到達することはできないでしょう．

センター試験に行く前に次のようなことを言う先生をよく見かけます．

「いいか．数列や確率の問題は『書きあげ』だ．書きあげすれば少なくとも(1)はできる！」

私は，その考えには異論はありません．しかし，そのようなことを言う先生が「書きあげ」の経験を積ませるような授業をしているのを私は見たことがありません．

ほとんどが，解法スキルを向上させる教え込みです．そんな，授業で経験させたことのないことを本番前に「やれ」というのはどういうものなんでしょう．

さて，前置きが長くなりました．問題の解説に入ります．この問題の前半部分は，小学生に考えさせてもできるのではないでしょうか．もちろん「n」なんて文字や，2 次不等式などはお呼びではありません．

「ある群には何個項があるか」「ある群の最後の数まで項が何個あるか」という問題意識さえあれば試行錯誤によってできるはずです．私は，このようにして解く経験によって「考えることの楽しさ」を生徒は学ぶのではないかと思います．逆にいうと，公式化や解法のパッケージ化の指導に慣らされている高校生は，このような問題に対して「試行錯誤すること」さえできなくなっているのではないかと思うときがあります．それは極論かもしれません．しかし，純粋に考えること，試行錯誤することなどの経験なしに，いきなり 4 次元表や，n の 2 次不等式でパックされた解答をなぞっていくことが，問題の本質を見えにくくさせ，群数列への苦手意識を生み出していくのではないかとも思うのです．

小学生風の解答は次のようになるでしょう．

1 群の終わりまで項の数は　1 個
2 群の終わりまで項の数は　1+2=3 個
3 群の終わりまで項の数は　1+2+3=6 個
4 群の終わりまで項の数は　1+2+3+4=10 個
5 群の終わりまで項の数は　1+2+3+4+5=15 個
6 群の終わりまで項の数は　1+2+3+4+5+6=21 個
7 群の終わりまで項の数は　1+2+3+4+5+6+7=28 個
8 群の終わりまで項の数は　1+2+3+4+5+6+7+8=36 個
9 群の終わりまで項の数は
　1+2+3+4+5+6+7+8+9=45 個
10 群の終わりまで項の数は
　1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55 個
11 群の終わりまで項の数は
　1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11=66 個

このような活動から，65 番目は 11 群の 10 番目であることがわかります．

これを，高校生風にアレンジしてみます．次のような式がイメージできればよいと思います．

> ①②③・・・・・・・・・・・・・・・n
> $1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ 個　※

私は上の図を群数列の水源地としています．この考えを基にした解答を以下にあげておきます．

解答
第 1 群から第 n 群までの項の総数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1) \text{ 個}\quad ※$$

$n=10$ のとき※は　$\frac{1}{2}\times10\times11=55$ 個より

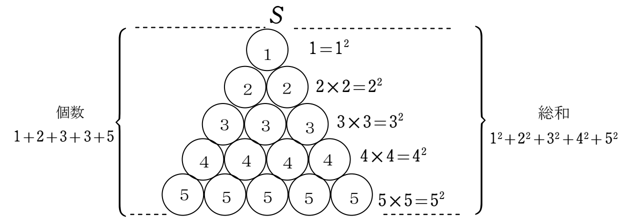
65番目は，第11群の10番目である．**答**

求める和を S とすると

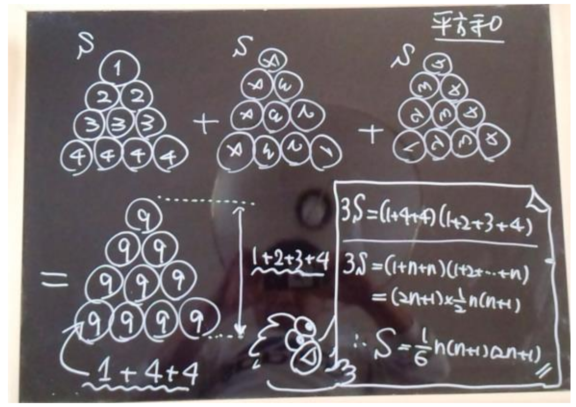
$$S=1+2\cdot2+3\cdot3+\cdots10\cdot10+11\cdot10$$
$$=1+2^2+3^2+\cdots+10^2+110$$
$$=\frac{1}{6}\cdot10\cdot11\cdot21+110=495$$

私は，群数列の指導では，問題を解いた後に，「群数列とは，数字を 2 次元に配列したもの」と捉えてるような活動を取り入れたいと思います．

今回の問題は，図のように，同じ数字を三角形に俵積みして書きならべたものとみることもできます．



この俵を 3 つ用意して，120 度回転させて並べ，対応する項の値を加えるとすべて同じ数になります．
（写真参照）



ということは，

$$3(1^2+2^2+3^2+4^2)=(1+4\times2)(1+2+3+4)$$

が言えます．

これを，n 段の場合について考えると，

$$3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=(1+2n)(1+2+\cdots+n)$$
$$3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=(1+2n)\times\frac{n(n+1)}{2}$$

よって　$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

平方和の公式を簡単に導くことができました．

教師は，模範解答を解読する指導だけでなく，その背景にある意図や，周辺にある面白さなどを同時に見せることで，将来本当に数学を学びたいと思う生徒を育てていくのではないかと思います．