盛岡三高数学科通信
How do you solve？ How do you teach？

第7号

発行責任者
盛岡第三高等学校
下町壽男

今回は三角関数の問題を取り上げます．

【１】 $\sin 3\theta=\cos 2\theta$ を満たす θ を求めよ．
ただし，$0°\leqq\theta\leqq 30°$ とする．

この問題を解く前に，私が経験した笑える答案を２つほど紹介したいと思います．２つとも，盛岡三高の生徒の数Ⅲ大好きっ子さんの答案です．

【２】A さんと B さんが，勝負がつくまでじゃんけんをする．A さんが勝つ確率を求めよ．

＜笑える答案１＞

じゃんけんを１回行ってAさんが勝つ確率は $\dfrac{1}{3}$

またあいこの確率は $\dfrac{1}{3}$

すると、k 回目にAさんが勝つ確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\times\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{k}$$

よって、じゃんけんを n 回行って n 回以内にAさんが勝つ確率は

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

ここで、$n\to\infty$ として、求める確率は $\dfrac{1}{2}$

A さんが勝つのも B さんが勝つのも同様に確からしいので，確率は $\frac{1}{2}$ に決まっているのに，あえて無限等比級数に持っていったのがあまりにも大げさで面白いですね．でも，この答案を見て，数学ってよくできているなあと私は感心したものでした．

【３】２次方程式 $x^2-kx+k=0$ が異なる２つの実数解をもつように実数 k の値の範囲を求めよ．

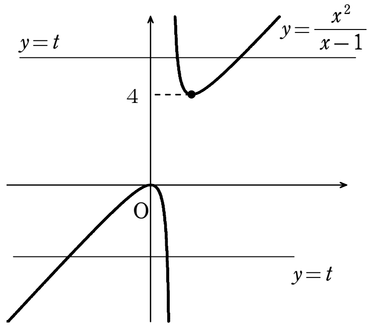
＜笑える答案２＞

$x^2-kx+k=0$ より定数分離して

$$k=\frac{x^2}{x-1}\quad(x\neq 1)$$

ここで、$\begin{cases}y=\dfrac{x^2}{x-1}\cdots\cdots①\\ y=k\cdots\cdots\cdots\cdots②\end{cases}$ として①②が異なる２つの交点を持つような k の値の範囲を求めればよい。

グラフより　$k<0\,,\,4<k$　㊣



この答案は，「定数分離」や「方程式のグラフによる解法」という新しい概念を会得したことにより，判別式を用いて解くことを忘れてしまったことによるものと思われます．

さて，では本題の【１】について述べたいと思います．実は，この問題は，昨年度の初任者研修で，10 人の初任者の先生に解いてもらった問題の一つです．

時間に制限があったこともあり，この問題の正解者はいませんでした．

しかし，私が驚いたのは，初任者 10 人が全員，次のように解いていたことです．

＜初任者の答案＞（私にとっては笑える答案！）

$\sin 3\theta=\cos 2\theta$　より

$3\sin\theta-4\sin^3\theta=1-2\sin^2\theta$

ここで、$t=\sin\theta$ とおくと

$4t^3-2t^2-3t+1=0$

$(t-1)(4t^2+2t-1)=0$

$$t=1\,,\,\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

$0°\leqq\theta\leqq 30°$ より $0\leqq t\leqq\dfrac{1}{2}$ なので

$$t=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

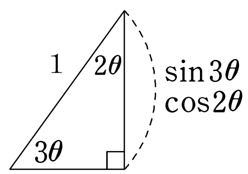
★ここでストップ

一番よくできていた人で，上のような答案でした．感心したのは，皆さん三倍角の公式をちゃんと覚えているんですね・・・

さて，この問題における私の意図は，弧度法を使っていないことからもわかるように，そんな三角関数の代数計算ではありません．図のイメージ，つまり三角比としてこの問題を眺めて欲しかったのです．

＜私の期待していた解答＞

$2\theta\,,3\theta$ とも鋭角なので、図のような直角三角形を考えればよい。



よって　$5\theta=\dfrac{\pi}{2}$　$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{10}$

公式にあてはめていくような代数計算手法は，いわば意味を捨てて「手の運動」だけで解く世界です．それは一つの数学の良さであるかもしれません．しかし，数学教師として，意味や概念をないがしろにし，解法パターンだけ頭に入れればよいというのは，学生アルバイトと何ら変わりません．

では，【１】を次のように三角関数の問題にしてみます．

【1'】　$\sin 3\theta=\cos 2\theta$ を満たす θ を求めよ．

＜私の解答＞

$\sin 3\theta=\cos 2\theta$

コサインで統一する

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right)=\cos 2\theta$$

$$\therefore\ \pm 2\theta=\frac{\pi}{2}-3\theta+2n\pi\quad(n\text{ は整数})$$

よって

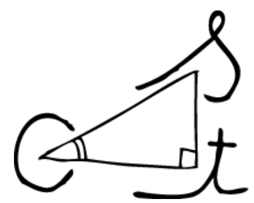
$$\theta=\frac{4n+1}{10}\pi\,,\ \frac{4n+1}{2}\pi\ (n\text{ は整数})$$

上のタイプの問題は，ここ数年センター試験にしつこく登場しています．単位円で三角比をとらえていれば何てことのない問題です．しかし，特に岩手県では，この手の問題は相当にできが悪いのが現実です．

私は，多くの学校で数学教員の授業を参観しましたが，数学Ⅰの鈍角の三角比を定義する場面で，

①「直角三角形の辺の比から定義された三角比が」
②「単位円上の座標と同一視できることを確認し」
③「その定義に従えば自然に鈍角の三角比を定義できる」

という「まっとうな」方向で再定義する教師が少ないことに愕然としました．



ひどいのは，左図のような「ｓｃｔ法（と私呼んでいる）」を，鈍角はおろか，三角関数にまで刷り込んでいく指導をしている教師もいるのです．つまり，すべて，上の構図をあてはめることと，特殊角（有名角）の三角比だけ覚えれば問題は解けるというのです．これでは，円運動と三角関数の関係どころか，三角関数の概念や意味が伝わるとはとうてい思えません．だからこそ，センター試験には【1'】のような問題が出題されるのでしょう．