盛岡三高数学科通信

How do you solve？ How do you teach？

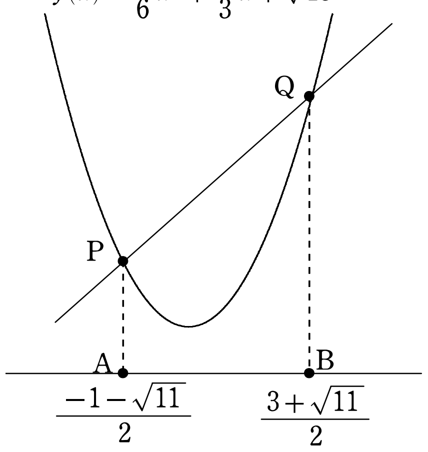
第6号

発行責任者
盛岡第三高等学校
下町壽男

今回は，これまで述べてきた，2 次関数の性質を利用する問題をいくつかあげてみたいと思います．

【問題 1】図において 2 点間の距離 PQ を求めよ．

$$f(x)=\frac{5}{6}x^2+\frac{2}{3}x+\sqrt{13}$$



あなたはどう解きますか？

P,Q の座標を求めて，2 点間の距離を計算する?

まさか．それはあまりにも計算が煩雑です．

前回までに述べてきた 2 次関数の性質を思い出しましょう．AB の中点における接線の傾きは PQ の傾きに一致するのでした．

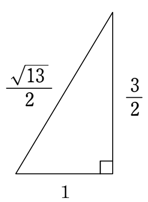
AB の中点の座標は　$\left(\frac{1}{2},0\right)$

$f'(x)=\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}$　より，$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3}{2}$

これが直線 PQ の傾きです．

$AB=\frac{3+\sqrt{11}}{2}-\frac{-1-\sqrt{11}}{2}=2+\sqrt{11}$　なので

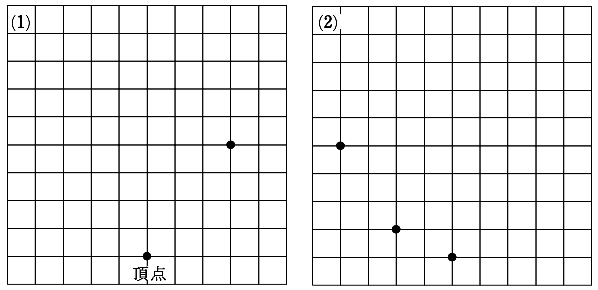
$PQ=\left(2+\sqrt{11}\right)\times\frac{\sqrt{13}}{2}=\frac{2\sqrt{13}+\sqrt{143}}{2}$



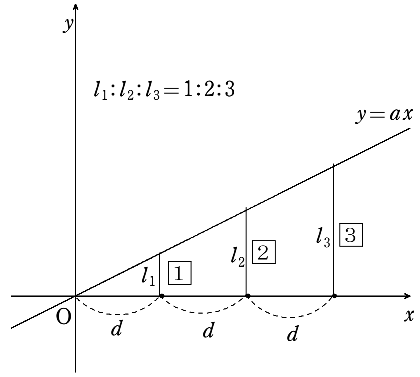
簡単に求まりました．

【問題 2】

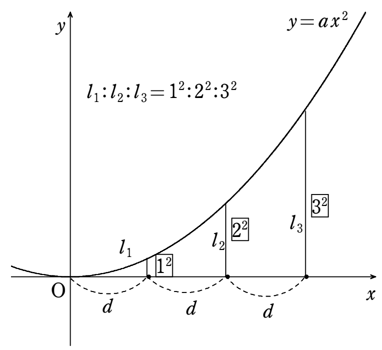
次の図において，2 次関数のグラフをうまく描画せよ．



まず，この問題を解く前に 2 乗比例法則について整理しておきましょう．



上図は正比例の場合です．x が 2 倍，3 倍，4 倍になれば，y の値も 2 倍，3 倍，4 倍になります．



これに対して，2 次関数の場合は，左下図のように頂点を基準として x が 2 倍，3 倍，4 倍になれば，y の値は 4 倍，9 倍，16 倍になります．

この 2 年間，多くの学校の数学の先生の授業を観ましたが，2 次関数のグラフ描画において，2 乗比例の考えに着目する先生はほとんどいませんでした．

多くの先生は次のように指導しています．

①頂点をとる

②軸の方程式を意識して対称性に着目させる．

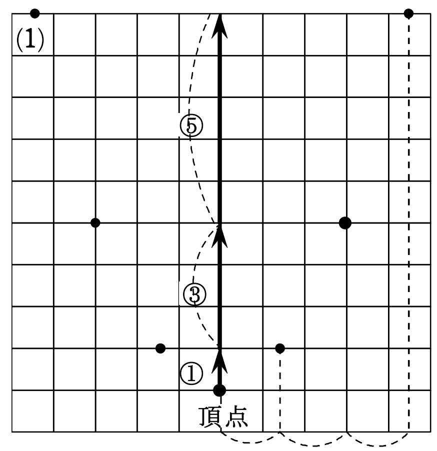
ここまではよいのです．ところが次に，

③頂点付近の点をいくつか適当にとって，滑らかな曲線を描く

とするのです．（これを私は「頂点・軸・あと 1 点型描画法」といっている）

これでは，2 次関数の 2 乗に比例するという重要な性質が伝わらないと思いませんか．

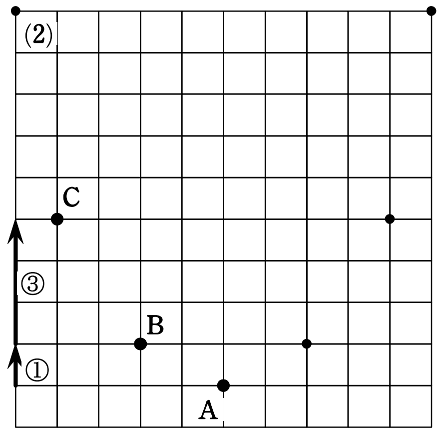
では，問題を解いていきましょう．



頂点から一定幅ずつ進んでいくと，高さの比が 1 ：3 ：5 と進むのがポイントです．この考えから，示されている 2 つの点の中間の点が補完されます．

あとは，軸対称性に着目すれば，放物線ができあがります．

私はこれを「1・3・5 の法則」（または 1・4・9 の法則）と呼んでいます．これは，落体の運動から 2 乗比例法則を発見したガリレオ・ガリレイが名付けたといわれています．



(2)は，A,B,C の x 座標が等間隔で，y 座標が 1 ：3 になっています．1 ：3 ：5 の法則から 3 点 A, B, C は A を頂点とする放物線と考えることができます．

でも，1 ：3 しかわかっていないのにそのように決定していいのでしょうか．

いいのです．なぜなら，3 点を通る 2 次関数はただ 1 つに決まるからです．

①　A,B,C の 3 点を通る 2 次関数はただ一つ

②　A を頂点とする放物線に当てはまる

③　①②から放物線は②のタイプしかない

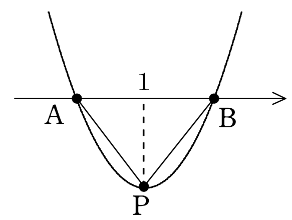
ということですね．

では，最後にセンター試験型問題を一つ取り上げてみましょう．

【問題 3】

$y=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+px+q$　が図のように

x 軸と A，B で交わっている．頂点を P とする．△ABP が正三角形のとき p，q の値を求めよ．



2 乗比例に着目すればただちどころに解けるのですが，意味を考えず代数的に解こうとすると苦労します．