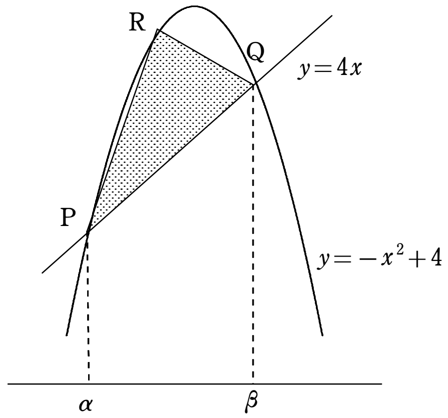
盛岡三高数学科通信
How do you solve？ How do you teach？

第5号
発行責任者
盛岡第三高等学校
下町壽男

xy平面上に, $y=-x^2+4$ で表わされる曲線 C と, $y=4x$ で表わされる直線 l がある．
C と l の交点を P，Q とする．C 上の点が P から Q まで動くとき，△PQR の面積の最大値を求めよ．



今回は，この問題に焦点をあてながら，前回の内容に触れつつ２次関数の性質に迫ってみようと思います．

一般的な解法は次のようなものでしょう．

Ⅰ　C と l の交点を求め，PQ を求める．

Ⅱ　面積が最大になるような R の場所を求める．

Ⅲ　点と直線の距離の公式から面積を求める．

では，上のⅠⅡについて少し詳しくみていきます．

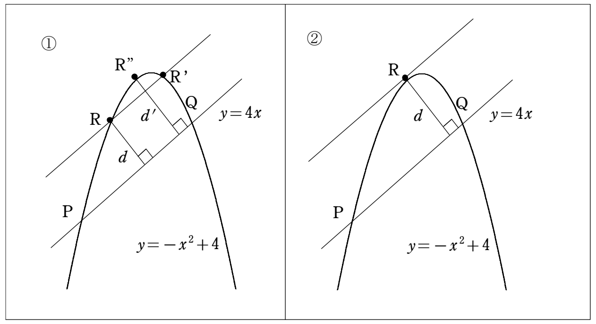
Ⅰ　C と l の交点を求め，PQ を求める．

$y=-x^2+4$ と，$y=4x$ を連立させて解くと，
$x=-2\pm2\sqrt{2}$ より，　P$(-2-\sqrt{2},-8-8\sqrt{2})$
Q$(-2+\sqrt{2},-8+8\sqrt{2})$ が得られます．

これから２点間の距離の公式を使って，

PQ $=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+(16\sqrt{2})^2}=4\sqrt{34}$ としてもよいのですが，直線の傾きが４なので，PQ は，$\beta-\alpha$ の $\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$ 倍と考える方法もあります．

Ⅱ　面積が最大になるような R の場所を求める．



△PQR において，底辺を PQ と見ると，面積が最大となるのは上図の R と l の距離d が最大になればよいときです．そのような R は，上図②のように，傾き４の直線が C に接する点になります．

以前，私が本校に勤務していたとき，テストに，なぜ②のときに高さが最大になるのか理由を記述させる問題を出題したことがあります．そのとき思わず笑ってしまった解答が「それは自然の摂理である」というものでした．

上図①のように, R を通り, PQ に平行な (傾き４) の直線を引くと，この直線が，C と，R と別の点 R’で交わって入れば，R と R’の間の点である R”と PQ の距離の方が長くなるので, 距離d が最大になるのは R における接線が PQ と平行になるときであると説明できます．

「自然の摂理」ではなく，根拠を説明する活動（いわゆる言語活動）を入れていくことで，生徒の思考をみる（評価する）ことができます．

では，上の考えから，R の座標を求めましょう．
R のx 座標をt とすると，$f'(t)=4$ から，$t=-2$ が得られました（$R(-2,0)$）．

ところで，$t=-2$ は，ちょうど，P，Q のx 座標の中点になっています．これは偶然でしょうか．

確かめてみましょう．$f(x)=ax^2+bx+c$において，

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{a(\beta^2-\alpha^2)+b(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}$$
$$=a(\alpha+\beta)+b=f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

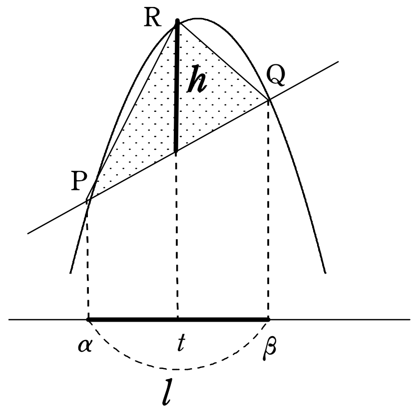
平均変化率(直線の傾き)と中点における微分係数(接線の傾き）が一致することがわかりました．

理系の生徒には，次のように，数学Ⅲの平均値の定理とからめてまとめてみればよいでしょう．

【定理】

> 関数$f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続で，開区間(a,b) で微分可能ならば，次の条件を満たすc が存在する．
> $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (a<c<b)$$
> 特に $f(x)$ が２次関数のとき，$c=\frac{a+b}{2}$ である．

さて，ここからがようやく本題となります．



上図において，△PQR の底辺をh 高さを l として面積を考えます．

つまり，△PQR$=\frac{1}{2}hl=\frac{1}{2}h(\beta-\alpha)$ ですね．

ここで，前回の差の式の登場です．

$$h=-t^2+4-4t=-(t-\alpha)(t-\beta)$$

これが「みえる」ようになると，ひとつレベルの高い数学的な思考力が身についたといえるでしょう．

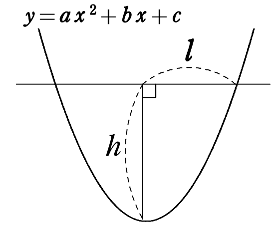
この式から，$h=-(t+2)^2+8$ と変形できるので，面積が最大になるのは，$t=-2$ のときであることがすぐわかりますね．

さて，前回 $t=\frac{\alpha+\beta}{2}$ のとき，h が最大になるという話をしました．すると，△PQR の最大値は瞬時に求められます．

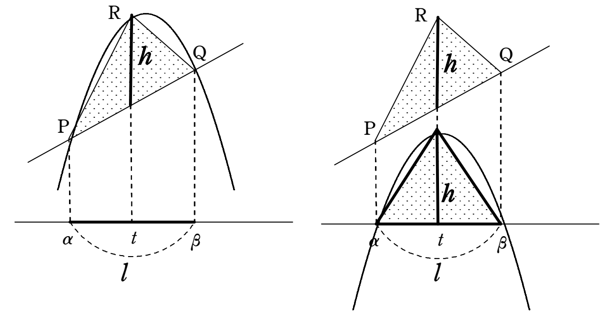
$$\triangle\text{PQR}=-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)=\frac{1}{8}(\beta-\alpha)^3$$

とてもきれいな式になりました．

一般に，図のような２次関数，$y=ax^2+bx+c$ において，$h=|a|l^2$ が成り立ちます．これは，公式というより，２次関数の基本原理（２乗比例則）ともいうべき式です．



この考え方と差の式から, 最大三角形の面積の一般式を求めてみましょう．



右図において，$h=|a|(\frac{1}{2}l)^2=\frac{|a|}{4}l^2$ なので

$$\triangle\text{ PQR}=\frac{1}{2}l\times h=\frac{|a|}{8}l^3=\frac{|a|}{8}(\beta-\alpha)^3$$

アルキメデスは，上のような三角形を作り，放物線と直線で囲まれる図形の面積を，無限に取りつくしていく方法で $S=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$ を求めました．

では，次号では，更に２次関数の２乗比例の性質について述べていきたいと思います．