盛岡三高数学科通信
How do you solve ? How do you teach ?

第4号
発行責任者
盛岡第三高等学校
下町壽男

$y=2x^2-3x+1$ の $x=2$ における接線の方程式を求めよ

今回は，２次関数の接線の方程式の見方・考え方をテーマにしたいと思います．

上の問題は，$y=f(x)$ とおくと，

$f(2)=3$，$f'(x)=4x-3$ から，$f'(2)=5$ なので求める接線の方程式は $y-3=5(x-2)$ すなわち，

$y=5x-7$ となりますね．

さて，この問題を，微分を用いないで求めると次のようになります．

$$y=2x^2-3x+1-2(x-2)^2=5x-7$$

たった一行の式で終わります．

なぜこのような計算をすれば接線が一発で求まるのでしょうか．

● 逆から考える

今，接線の方程式を表す関数を$g(x)=5x-7$ とします．すると $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は，$x=2$ で接しているので，「$f(x)=g(x)$ を解くと，重解 $x=2$ が得られる」ということがわかります．

つまり，$f(x)-g(x)=0$ という２次方程式は，$a(x-2)^2=0$ という形を経て，$x=2$ となるわけです．

また，$y=f(x)$ の２次の係数は２なので，$a=2$ は明らかです．

従って，$f(x)-g(x)=2(x-2)^2$ なので，接線の方程式は，$g(x)=f(x)-2(x-2)^2$ とできるわけです．

このことから，一般に，２次関数 $y=ax^2+bx+c$ の $x=\alpha$ における接線の方程式は

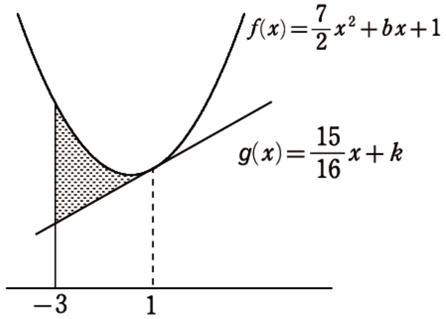
$$\boxed{y=ax^2+bx+c-a(x-\alpha)^2}$$

と表すことができます．

● 差の式と関数の組換え

今度は次の定積分の問題を考えてみましょう．

図において，$y=f(x)$ と，$y=g(x)$ が，$x=1$ において接している．打点部分の面積を求めよ．



あなたはどう解きますか？

微分で考えると，

$$f(1)=g(1), f'(1)=g'(1)$$

（値の一致，傾きの一致）

この式から，b，k を決定すればよいわけですが，それより，先ほどの考えから，差の式

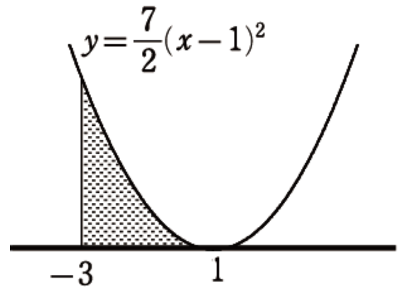
$$f(x)-g(x)=\tfrac{7}{2}(x-1)^2$$

を使えば，より簡単に考えることができます．

$$S=\int_{-3}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{-3}^{1}\tfrac{7}{2}(x-1)^2dx$$

$$=\left[\tfrac{7}{6}(x-1)^3\right]_{-3}^{1}=\tfrac{7}{6}\times 64=\tfrac{224}{3}$$

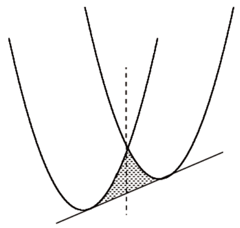
ここで留意したいのは，上の式は，次の図のように，差の関数に組み替えて（つまり，斜めの直線を水平になるように変形している）その関数の面積を求めているという意味があるということです．



では，次に，昔「大学への数学」の裏表紙の SEG の広告によく載っていた次の問題をとりあげてみることにします．

あなたは次の問題を 30 秒で解けますか

２つの放物線 $y=x^2+ax+b$ と $y=x^2+cx+d$ とその共通接線で囲まれる部分の面積は，２つの放物線の交点を通り，y 軸に平行な直線によって２等分されることを証明せよ．

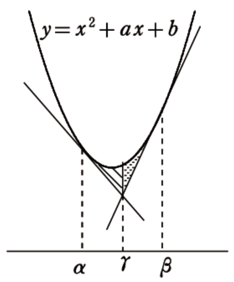


上図において，２つの接点の x 座標をα，βとすると，斜線部分の面積は

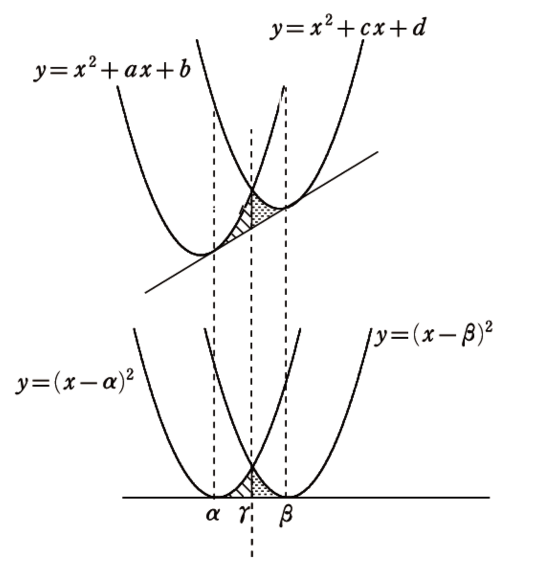
$$S=\int_{\alpha}^{\gamma}(x-\alpha)^2dx+\int_{\gamma}^{\beta}(x-\beta)^2dx$$

と表されますが，この式を別の見方をすると，次の図（右上図）の下側のような，２つの２次関数と x 軸で囲まれる図形の面積を表しているともいえます．

すると，この図から，γはちょうど２つの接点の中点の x 座標となっていることは納得できます．

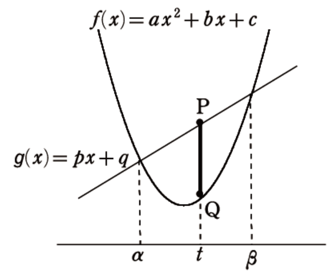


尚，このことは左図のような１つの放物線と２つの接線の場合も，同じ式になるので，面積も同じであることがわかりますね．



● 差の式の考え方を使って

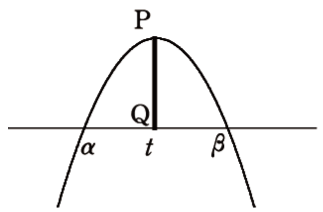
図のように，$x=t$ $(\alpha<t<\beta)$ における，$y=g(x)$ 上の点 P と，$y=f(x)$ 上の点 Q をとったとき，線分 PQ の長さが最大になるのは，t がどのような場合でしょうか．



PQ は差の式なので，

$$g(t)-f(t)=-a(x-\alpha)(x-\beta)$$

つまり，下図のような２次関数に組み替えて考えればよいことがわかります．



すると，PQ が最大になるのは，$t=\frac{\alpha+\beta}{2}$ の場合であることがわかります．ではこの続きは次号で．