

盛岡三高数学科通信

How do you solve? How do you teach?

第3号

発行責任者
盛岡第三高等学校
下町壽男

今回は、前回の2013年の東北大の問題を用いて少し遊んでみようと思います。

【第2回の問題】

2次の正方行列 A を $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ で定める

$n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、点 $P_n(x_n, y_n)$ を関係式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。ただし、 $x_0 = 1, y_0 = 0$ とする。

(1) A^4 を求めよ

(2) $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して

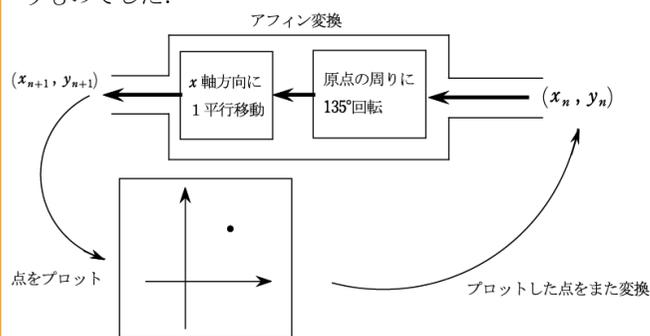
$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = (E - A^{n+1})(E - A)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ。ただし E は2次の単位行列とする

(3) 原点 O から P_n までの距離 OP_n が最大になる n を求めよ。

(2013 東北大 理系)

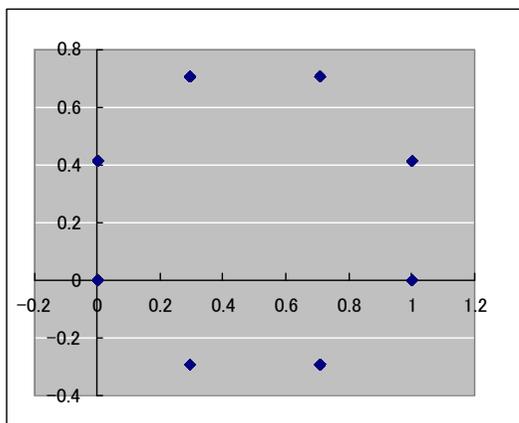
前回の復習をすると、この変換は原点の周りに $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転し、その後 x 軸方向に1だけ平行移動するというものでした。



パソコンを使って点の動きを見てみましょう。

● 普通にやってみる

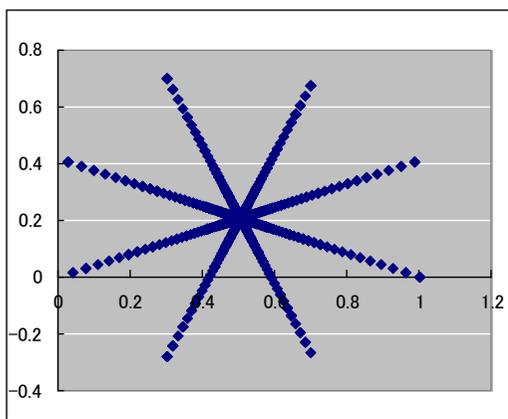
変換1	-0.7071	-0.7071	1
	0.70711	-0.7071	0



確かに正8角形が生じています。

● ゆらぎを入れてみる

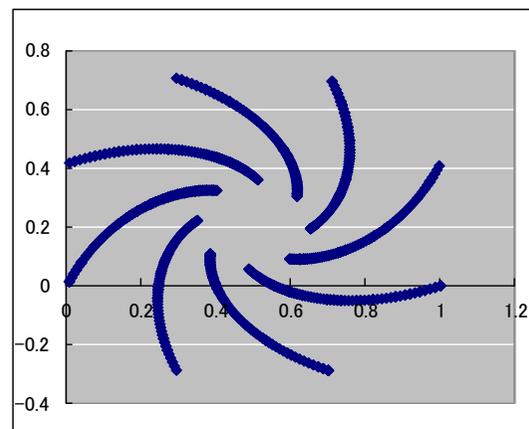
変換1	-0.7	-0.7	1
	0.7	-0.7	0



これは、 $\sqrt{2}$ を1.4として処理してしまったものです。ヒトデになってしまいました。どうしてそうなるのでしょうか。それは、 $\sqrt{2}$ を1.4としたことで、縮小系が入ったからです。点は、8角形を縮小しながら回り、1点に収束していきます。

● 1か所だけ間違えてみる

変換1	-0.7071	-0.7071	1
	0.70711	-0.7	0



いたずらして、一か所だけ数字を微妙に変えてみました(2行2列成分を-0.7とした)。渦巻きができました。これは、回転にずらし変換(ねじれ)が入ったことの影響です。尚、変換は1000回行っていますので、もっと続けると、1点に収束すると思われます。

● もう一つの変換を準備する

今度は、もう少し面白いことをしてみます。この変換は「135°回転して x 軸方向に1だけ平行移動する」でしたが、ときどきは、 x 軸方向ではなく、 y 軸方向への平行移動も行ってみたいと思います。

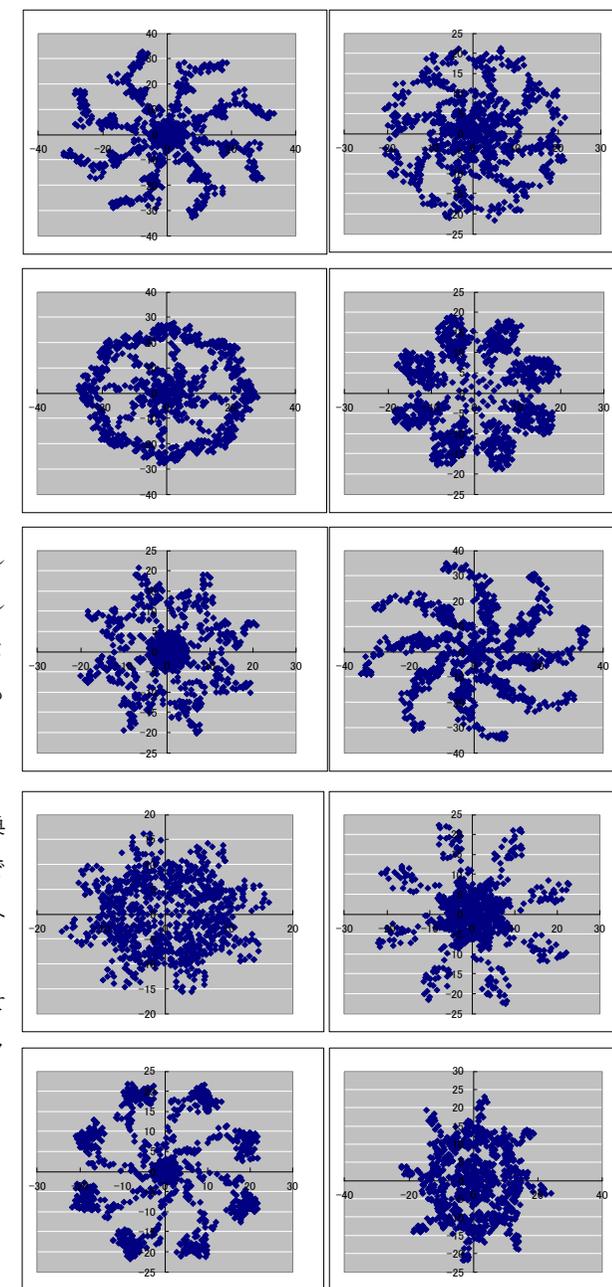
そこで、次の2つの変換を用意して、乱数を発生させて、どちらの変換にするか順次選んで点を変換しプロットしていきます。

変換1	-0.7071	-0.7071	1
	0.70711	-0.7071	0
変換2	-0.7071	-0.7071	0
	0.70711	-0.7071	1

以下に、乱数系列を替えて得られる図形を表示します。もちろん、どれも有界な集合を形成するのですが、乱数系列が変わる(つまり変換の順番を変える)と、図形も変化していきます。

なかなかユニークな図形が得られます。このような研究は、パソコンがあれば簡単にでき、思わぬ発見もあると思うので、SSHなどの高校生の研究には適しているのではないかと思います。どうか、

【fig】



東北大の離散力学系の問題から、最後は少し遊んでみました。ひたすら問題を解くばかりではなく、時には、このような入試問題の背景にある数学の美しさや面白さも見せていけば、数学をより深く学ぼうという生徒も育つのではないかと思います。

今回は、2次関数の接線に関する基本的な問題を取りあげながら、2次関数の性質について触れていきます。