盛岡三高数学科通信
How do you solve？　How do you teach？

第2号
発行責任者
盛岡第三高等学校
下町壽男

【第２回の問題】

２次の正方行列 A を $A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ で定める

$n=1,2,3,\cdots\cdots$ に対して，点 $P_n(x_n, y_n)$ を関係式

$$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

で定める．ただし，$x_0=1$，$y_0=0$ とする．

(1)　A^4 を求めよ

(2)　$n=0,1,2,\cdots$ に対して

$$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=(E-A^{n+1})(E-A)^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$ が成り立つことを示せ．ただし E は２次の単位行列とする

(3)　原点Oから P_n までの距離 OP_n が最大になる n を求めよ．

（2013　東北大　理系）

前回は，少し簡単な問題だったので，今回は今年の東北大（理系５番）の問題をピックアップしてみます．

●　この問題のテーマを考える

解答に進む前に，この問題はどんなことを意図しているのかを考えてみましょう．

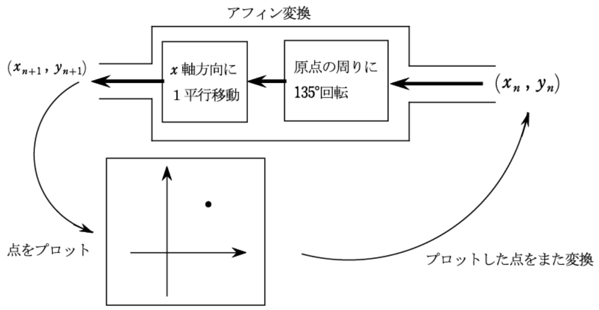
ポイントは，$A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ という一次変換を表す行列と，$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ という漸化式です．

まず，行列 A は，$\begin{pmatrix}\cos\frac{3}{4}\pi & -\sin\frac{3}{4}\pi\\ \sin\frac{3}{4}\pi & \cos\frac{3}{4}\pi\end{pmatrix}$ と表せるので，

これは原点の周りに $\frac{3}{4}\pi$ の回転を与える一次変換と見ることができます．

すると，この漸化式は，最初の点を原点のまわりに 135°回転させ，更にその点の x 座標に１を足すという操作，つまり，x 軸方向に１だけ平行移動していることになります．

では，この漸化式の意味を次のような図でイメージしてみましょう．



(1，0) という点から出発し，それを原点のまわりに，135°回転させ，更に x 軸方向に１だけ平行移動し，その移った点をまた，原点のまわりに，135°回転させ，x 軸方向に１だけ平行移動させ，その移った点を・・・という繰り返しを表している式ということがいえますね．

一般に，２次の正方行列による変換を一次変換と呼びますが，それに「平行移動」を加えた変換を「**アフィン変換**」といいます．１つの点から，アフィン変換によって，順次点を変換していって点の軌道を調べるモデルを**離散力学系**と呼びます．この場合は「**アフィン離散力学系**」の問題といえます．

ここで，次々生みだされる点を，平面上にプロットしてできる点集合を「**アトラクタ**」と呼びます．

このような力学系モデルは，複雑系などの研究に用いられる非常に面白い数学の一分野です．

さて，一般に，離散力学系において，点集合の軌道は次のように分類することができます．

①　無限大に発散．原点からの距離がどんどん遠くなっていく．

②　ある点に収束する

③　いくつかの点をサイクリックに繰り返す．

④　あるコンパクトな集合（有界閉集合）の内点を動き回る（カオス・フラクタル集合）

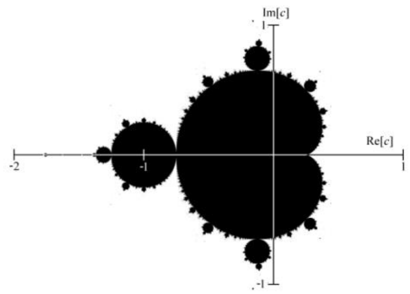
本問題は，③のタイプの問題です．

この問題を，行列ではなく，複素数で記述すると，

$z_{n+1}=\alpha z_n+1\ \left(z_0=1, \alpha=cos\frac{3}{4}\pi+isin\frac{3}{4}\pi\right)$

と書けます．このような複素数から複素数への対応を複素写像と呼びます．ここで，$|\alpha|<1$ のとき，発散しない系列（上記の②③④型）となり，このような写像を複素縮小写像といいます．

余談ですが，c を任意の複素数として，漸化式を $z_{n+1}={z_n}^2+c\ (z_0=0)$　として，$|z_n|\ (n\to\infty)$ が発散しないような複素数 c を複素数平面上に図示すると，下のような図形を描きます（黒い部分）．



この点集合を「マンデルブロ集合」と呼びます．

●　問題を解いてみる

脱線しすぎてしまいました．本題に入りましょう．

(1)は計算すると，すぐに $A^4=-E$ が得られます．つまり，$A^8=E$ ということですね．このことから，この問題は，きっと８個の点をサイクリックに動き回る系であると予想がつきます（私なら，(x_1, y_1) から，(x_7, y_7) までの点を計算してみます．そんなに大変ではない）．

次に(2) は，整式のアナロジーでイメージします．

$(1-x^{n+1})(1-x)^{-1}=\frac{(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n)}{1-x}$

つまり，$(E-A^{n+1})(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^n$

となることが予想できます．

解答は，逆算して次のようにすればよいでしょう．

$(E+A+A^2+\cdots+A^n)(E-A)=E-A^{n+1}$

である．ここで，$\det(E-A)\neq 0$ なので，

$(E-A)^{-1}$ が存在する．これを両辺右からかけて

$(E-A^{n+1})(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^n$

次の変形がポイントです．

$\overrightarrow{OP_n}=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ とすると

$\overrightarrow{OP_1}=A\overrightarrow{OP_0}+\overrightarrow{OP_0}=(A+E)\overrightarrow{OP_0}$

$\overrightarrow{OP_2}=A\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_0}=(A^2+A+E)\overrightarrow{OP_0}$

$\overrightarrow{OP_3}=A\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_0}=(A^3+A^2+A+E)\overrightarrow{OP_0}$

$\overrightarrow{OP_4}=A\overrightarrow{OP_3}+\overrightarrow{OP_0}=(A^4+A^3+A^2+A+E)\overrightarrow{OP_0}$

$=(A^3+A^2+A)\overrightarrow{OP_0}\quad (A^4=-E)$

$\overrightarrow{OP_5}=A\overrightarrow{OP_4}+\overrightarrow{OP_0}=(A^4+A^3+A^2+E)\overrightarrow{OP_0}$

$=(A^3+A^2)\overrightarrow{OP_0}\quad (A^4=-E)$

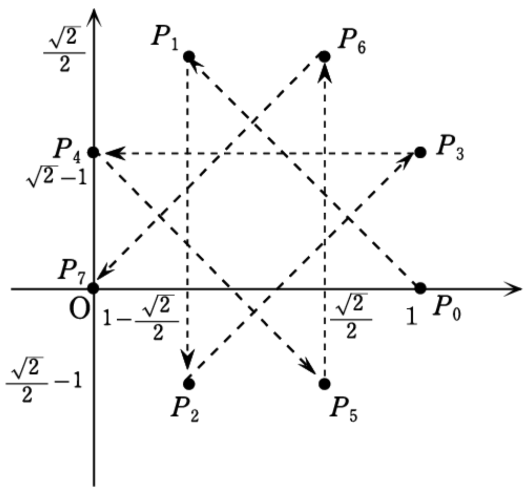
$\overrightarrow{OP_6}=A\overrightarrow{OP_5}+\overrightarrow{OP_0}=(A^4+A^3+E)\overrightarrow{OP_0}$

$=A^3\overrightarrow{OP_0}\quad (A^4=-E)$

$\overrightarrow{OP_7}=A\overrightarrow{OP_6}+\overrightarrow{OP_0}=(A^4+E)\overrightarrow{OP_0}=\vec{O}$

以下順次サイクリックに繰り返す

上の式から，$P_{n+8}(x_{n+8}, y_{n+8})=P_n(x_n, y_n)$ となり，以下の８個の点を挙動していることがわかります．



図から，$|OP_n|$ が最大になるのは，

$n=8k+3\ (k=0,1,2,\cdots)$　のときとなりますね．

次回は，この問題を基にして，離散力学系の話で少し遊んでみたいと思います．