


盛岡三高数学科通信

How do you solve? How do you teach?

第12号

発行責任者
盛岡第三高等学校
下町壽男



パスカルの三角形で遊ぶ

先日、軽米高校に転勤した継枝先生から次のようなメールがきました。

お久しぶりです。
先生、アドバイスをお願いします。
先日、生徒が次のようなことを考えたと言ってきました。

(x + y)⁴ までのパスカルの三角形

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

にこのように数字をかける

1	←1
1 1	←4
1 2 1	←6
1 3 3 1	←4
1 4 6 4 1	←1

1
4 4
6 12 6
4 12 12 4
1 4 6 4 1

となるが、これは (x + y + z)⁴ の係数になる。
(上方向がX, 左下方向がY, 右下方向がZ)
そしてこれは、何乗でも成立する。

さらに彼は、この三角形の右斜面

$$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

をXで微分して、(Yは定数扱い)

$$4x^3 + 12x^2y + 12xy^2 + 4y^3$$

次数が足りない部分をZでうめると、

$$4x^3z + 12x^2yz + 12xy^2z + 4y^3z$$

さらにXで微分して2で割ると

$$6x^2z + 12xyz + 6y^2z$$

さらにXで微分して3で割ると

$$4xz + 4yz$$

さらにXで微分して4で割ると

$$z$$

彼は、いろいろなことをよく考える子で、2ヶ月前にはパスカルの三角形を立体にすれば3変数の展開の係数も導けると気づきました。

彼の考えたパスカルの三角形の拡張へのアドバイスと、彼にちょうどいい読み物などありましたら、ご一言お願いします。

とても面白い生徒ですね。最初の方の話はいいとして、後半の微分の話は何なのでしょう。とてもユニークです。彼は頭の中でどんなことを考えていたのかとても気になります。

私たちは、数学教師として、教科書や問題集の問題を解説したり、テストや課題を出して採点したりするだけでなく、時には生徒の発見や、つぶやきにつきあい、褒めたりアドバイスやしてあげることが必要ではないかと思えます。

以前、私が勤務していたある進学校で、数学がとても苦手なある生徒から「なぜマイナス×マイナスはプラスなのか」と質問されたことがあります。

私は、その生徒と一緒にいろいろなことを考えました。

説明するのは意外と簡単ではありません。

そうしているうちに、生徒の輪ができ、ああでもない、こうでもない大きな議論に発展しました。

その後、質問した生徒が目には涙を浮かべながら私に感謝してくれました。更に彼女の母親からも感謝の電話をいただきました。

話を聞くと、中学時代から、この疑問をぶつけると、先生から「そんなことは考える必要はない」「そんなことはテストにでない」「そんなことを考えるからできないんだ」と一蹴されていたとのこと。そして数学が嫌いになっていったとのこと。そんな自分の疑問に初めて真剣に向き合ってくれて嬉しかったとのことでした。

教師である私は大それたことをしていないのに、こんなに感謝されることに驚き、ある種の照れくささとともに、教師冥利だなあと思ったものです。逆に、教師の些細な一言で生徒を大きく傷つけることもあるのだと肝に銘じました。

さて、あまり参考にならないと思いますが、私が継枝先生に宛てたメールは以下の通りです。

継枝 斉 先生

盛岡三高の下町です。

メールありがとうございます。

<前半について>

凄いですね。

もちろん、{(x + y) + z}⁴として展開すれば

$$(x + y)^4 + 4(x + y)^3z + 6(x + y)^2z^2 + 4(x + y)z^3 + z^4$$

とできるのであたりまえであることがわかりますが、生徒が自分でそれを見つけたことが素晴らしいですね。

<後半について>

これは初めて見ました。どのような応用があるかはわかりませんが、生徒がパスカルの三角形で楽しんでいる様子がわかります。(ちなみにパスカルの三角形はライブニッツ条件つまり、f × g のn回の微分を示すものでもあります)

<パスカルの三角形を立体にする>

私が知っているので一番古いのは、秋田の和田先生と

いう方が「和田の三角錐」として教具をつくったものです。花北の時、佐藤宣昌先生も作ったと思います。

最近では北大の大学院生や、数研のブックレットでも見かけます。でも、やはり生徒が自分で発見したことが素晴らしい。

<アドバイスと読み物>

パスカルの三角形は汲めども尽きぬ泉のように、いろいろな性質を見つけだすことができます。

確か、国際パスカル協会というものが存在していて、あらゆる研究の成果が公表されているという話を聞いたことがあります(伊藤潤一先生から)。

よい読み物で思いあたるのは、エンツェンスベルガーの「数の悪魔」ですかね。

10歳からわかる数論なので、彼には物足りないとは思いますが、

手前味噌ですが、拙著「つながる高校数学」(ベレ出版)にもパスカルの三角形について取り上げております。(色塗りとか母関数の話)

母関数とパスカルの三角形では、またまた手前味噌ですが数学セミナー2001年10月号に、6ページほど書かせていただいたことがあります。必要ならコピーを送ります。アドバイスにらず申し訳ありません。

彼の研究意欲をますます高めるよう、先生からご指導いただければと思います。

機会があれば杜陵サークルにも参加してくれば面白いですね。では、また。

こんなメールのやりとりを通じて、忘れかけていた、数学に向かうピュアな気持ちを一時取り戻せたような壮快感を覚えました。

継枝先生、そして軽米高校のK君(としよう)ありがとうございました。