盛岡三高数学科通信
How do you solve？ How do you teach？

創刊号
発行責任者
盛岡第三高等学校
下町壽男

あなたはどう解く？／どう教える？

【第 1 回の問題】

① 2 点 A$(1,1)$，B$(-3,4)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ．

● どこにでもある問題

この問題は，どの教科書にも出ている定番問題ですね．一般的には，AB の中点を求め，距離 AB を求めれば，中心の座標と半径がわかるので，方程式が決定されます．平易ですが，分点の座標，2 点間の距離，円の方程式の 3 要素が入っているので重要な問題といえるでしょう．

でも，初回からいきなりこんな問題では「なあんだ」と思っている先生もいるかもしれませんね．

では，この問題を，盛岡三高の 3 年理系の生徒の授業で扱うとすればどうしますか．あなたはどう教えますか．

● 円のベクトル方程式

本題に進む前に少し寄り道をしましょう．円の方程式をベクトルを用いて表してみましょう．

まず，「中心からの距離が一定」という条件から，次の式が得られます．

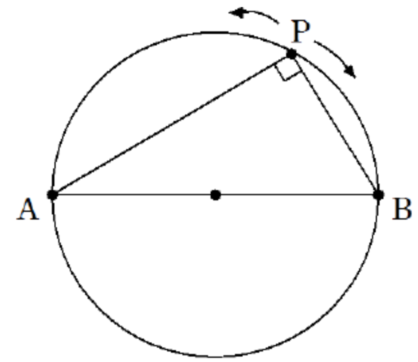
中心が C$(\vec{c})$で半径 r の円の方程式
$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=r$ すなわち，　$|\vec{p}-\vec{c}|=r$

では，点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を直径の両端とする円はどう考えればよいでしょう．

無理やり中点の位置ベクトル $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ を作って，

$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|=\frac{1}{2}|\vec{b}-\vec{a}|$ としても良いのですが，美意識に欠けるし，公式として活用もしづらいですね．

そこで，ここでは円の性質「直径に対する円周角は 90° である」ことを用いて考えてみます．



図で，AP⊥BP が言えますが，P が A や B に一致するときは，垂直関係が崩れるので，次のように内積を用いると必要十分となります．

A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を直径の両端とする円の方程式
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$

● ①を別のアプローチで解いてみる

では，今考えたベクトルの内積の方法で①の別解を作ってみましょう．

解）　円周上の動点をP(x,y) とすると
$(x-1)(x+3)+(y-1)(y-4)=0$

これも立派な円の方程式です．

なんのことはないのですが，この式から，求めた円は $(1,4)$，$(-3,1)$ を直径の両端とする円であることも納得できますね．

● 授業の組み立て方の一つの提案

もし，私が，3 年生の理系クラスに，①の問題を行うとしたら，次のような方針でやってみたいと思います．

(1)　まず①を普通に解く（約 1 分）

(2)　①において，A(a,b)，B(c,d) とし，一般化する

恐らく想定される答えは

$\left(x-\frac{a+c}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b+d}{2}\right)^2=\frac{(c-a)^2+(d-b)^2}{4}$

(3)　得られた式を展開して整理する

(2)で得られた式を整理すると，

$(x-a)(x-c)+(y-b)(y-d)=0$

というきれいな式になる．（生徒は感動？）

(4)　(3)式の意味を考える

ここで，ベクトルの内積（または，直線の垂直条件でも良い）との関係について説明する．

● 応用問題

応用として次の問題を作ってみました．皆さんは私の解答を見る前に自分で解いてみて下さい．

② k を実数の定数とし，2 点 A$(k-3,1)$，B$(-3,8-k)$ を直径の両端とする円を C とする．次の問いに答えよ．

(1)　Cはk の値にかかわらず定点を通ることを示し，その定点の座標の 1 つを求めよ．

(2)　Cが x 軸と接するとき，k の値を求めよ．

解）

(1)　円周上の動点をP(x,y) とすると，AP⊥BP が言えるので，求める円の方程式は次のように表すことができる．

$(x-k+3)(x+3)+(y-1)(y+k-8)=0$　※

すると，これは，

$(-3,1)$，$(k-3,8-k)$を直径の両端とする円でもある．よって，Cは定点$(-3,1)$を通る．

(2)　※において，$y=0$ として整理すると

$x^2-(6-k)x-4k+17=0$　※※

Cが x 軸と接するので，※※が重解を持つ．

$D=0$ より　$k^2+4k-3=0$

よって，$k=-8,4$　答

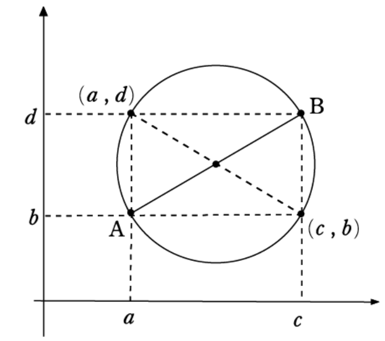
● まとめ

一見して他愛のない問題でしたが，このように，ベクトルや，直線の傾きの直交性に注目することで，別の視点から問題を考察することができます．

また，図形的に当然のことですが，

A(a,b)，B(c,d) を直径とする円は，同時に

A(a,d)，B(c,b) を直径とする円であることも式から納得することもできました．



学力を伸ばすために，「多くの問題を与え，解法パターンを定着させる」という考えで指導を行ったとします．もちろん，それはそれで意味はあります．

しかし，生徒が問題を解いて，それを模範解答で自己採点していく，というルーチンだけでは，今回の①の問題を、発展させたり，他領域とのつながりに考えを及ばせることはできないでしょう．

つまり，問題演習の量をこなすことは，解く技能の鍛錬にはなったとしても，今回述べたような数学的な見方や考え方は身につくとは思えないのです．

そこで，教師の出番です．解き終えた問題から，どう授業を展開し，生徒を惹きつけていくか，それが我々の仕事ではないかと思います．

「思考させたり，言語活動を取り入れる授業は大切だが，入試を考えると，演習を強化せざるを得ない」などという「ダブルスタンダード問題」を私はよく耳にします．でも，その前に，一つの問題から深く，広くつなげていく問題演習を自分はしているか，してきたかをまず問うてみるべきではないでしょうか．

センター試験も，個別学力試験も，そういう問題づくりに舵を切っていて，その方向は今後加速してくると私は思っています．