高校の先生も参考にしたいある大学の講義

2012年5月19日(土)
学校教育室　下町壽男

先日，たまたま次のような問題を解く機会があった．

$$f*g=\int_0^x f(x-t)g(t)\,dt \quad \text{とする．}$$

$f*g=x^3$ ，$f(x)=x$ のとき $g(x)$ を求めよ．

これは，大学の頃，フーリエ解析をやったときに出てきた「合成積」のことだなと思って，怪しい知識を確かめるために，「たたみこみ」でネット上を検索したところ，東北工業大学の中川朋子教授のホームページに辿りついた．

http://www.ice.tohtech.ac.jp/~nakagawa/index.htm

本当に丁寧な「たたみこみ」の説明が書かれていて感心した．私は合成積とは，ラプラス変換された関数の積へ対応（積の法則を満たし，$L(f*g)=L(f)\times L(g)$ が成り立つ）程度の理解だったので，「人生たたみこみ」の話には思わず膝を打ってしまった．

この，ページには，「たたみこみ」だけでなく，テーラー展開，ラプラス変換などについても，かゆい所に手が届くようなわかりやすい解説があった．

私は，しばしこのページに没頭したのだが，数学的な内容もさることながら，講義の振り返りをしっかり行っていることにとても驚き，感動した．

高校の授業において，生徒の評価は行うが，積極的に自分の授業評価を行って，授業改善に取り組んでいる教師は少ない．中川教授は，東大大学院で博士課程を修了した理学博士であり，宇宙科学（宇宙プラズマ物理学）特にも，太陽風磁場の3次元構造解析の研究者として評価の高い一流の科学者である．

その先生が，講座では，小テストを行い，宿題を出し，添削を行い，そして，学生からの（辛口で，時に暴言的なものも含めて）評価を公開し，講義の振り返りを行っているのである．積分も十分学ぶことなく入学してきた学生たちに対しても，このような，わかって，研究することの面白を伝えるような取り組みを行っている先生には本当に頭が下がる思いである．

ここでは，そんな中川教授のページから，許可を得て，「たたみこみ」と「オイラーの公式」の部分からその内容の一部を抜粋して紹介する．（Ⅰ・Ⅱ）

また，最後に，2002年から2012年までの講義の学生の感想コメントからほんの一部を抜粋した．（Ⅲ）

私のレポートでは，授業の様子などを十分に伝えられないので，是非，中川先生のホームページをご覧いただければと思う．

Ⅰ　たたみこみ（合成積）

英語では convolution といいます／漢字で書くと「畳み込み」／畳み込み積分 とも言うよ

東北工業大学 情報通信工学科　中川朋子

理工系の大学や高専で学ぶ皆さんがだいたい20才くらいになると直面する「たたみこみ」.特に，電気回路が必修になっているようなところでは避けて通れないものです.

だのにさっぱりわからず，ネットで探せば何かないかなと思ったのに，いきなり

「合成積とは $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$ 」とか出てきちゃって嫌になってる皆さん.

嫌になってる理由は,
「やれといわれればやるけれど，　何を表してるのか意味分からない」とか
「 $f(t-\tau)$ の $t-\tau$ が なんで出てくるのか納得できない」とかではありませんか.

基本思想を以下に説明するので，今学期最後のチャンスと思って理解してください.

忘却とは忘れ去ることなり

たたみこみを勉強する年頃には，つらいこともショックなこともあるでしょう．留年が決定したとか，自転車盗まれたとか，今日財布忘れて昼飯抜きだとか，勇気を出して告白したのにごめんなさいされたとか，その子がこともあろうに後輩と付き合い始めたとか･･･.

つらい気持ちを癒すには，いろんな方法があるでしょうが，誰の心でも癒してくれるものは時間しかありません．時間が経てば，つらい記憶もだんだん胸の痛みを起こさなくなり，いつの日か思い出に変わってくれるでしょう.

忘れ方にも個性がある

時間が経てばショックは薄れてゆく，これは大体どなたにも当てはまることですが，忘れ方は人それぞれですよね．すっぱり忘れてしまえるタイプとか．いつまでも根に持つタイプとか．そのときはあんまりつらくないんだけど後でだんだんショックが重くのしかかってくるタイプとか．忘れたと思ったのに数日ごとに思い出しては騒ぐタイプとか.

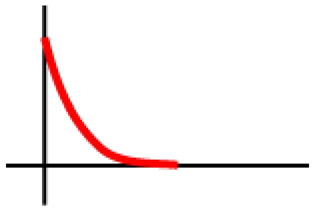
人それぞれの忘れ方，図解してみました.

横軸は経過時間です．経過時間は つらいことがあった日 から 今日まで の時間ですから，

（経過時間）＝（今日）－（事件のあった日）

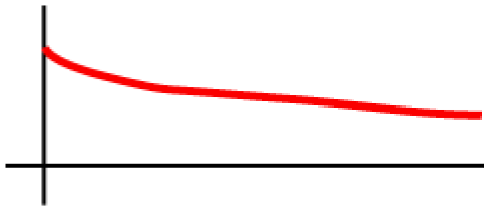
ですよね

すっぱり忘れるタイプ



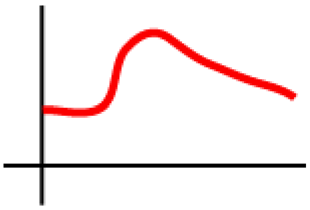
事件当日　　　　経過時間

いつまでも根に持つタイプ



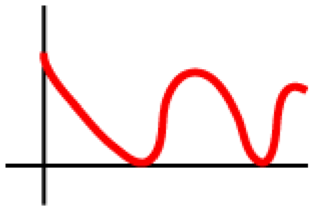
事件当日　　　　経過時間

後でショックがのしかかるタイプ



事件当日　　　　経過時間

ショックがぶり返すタイプ



事件当日　　　　経過時間

これらは個人の忘れ方を表すので wasureru の 頭文字を取って w と名づけましょう．

忘れ具合は経過時間によって変わるので，経過時間の関数として w(経過時間) のように書くと良いですね．

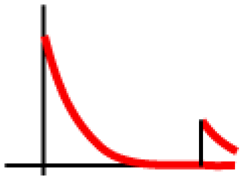
重大事件ならこれに大きな値を，些細な事件ならこれに小さな値を掛け算することになります．事件の重大さはその時によって違うので，事件の日時の関数として f (事件日)と書くことにしましょう．

昔の大事件より今日の些事

忘却を表す曲線にはいろいろあっても，基本的にだんだん減っていく性質のものですから，いくら大事件でも，昔の出来事であればだいぶ忘れています．

それより，ついさっき起こった些細な出来事の方が，今はダメージが大きい，ということがありますね．

「３歳の時に三輪車ごと川に落ちて大変だった」という命に関わる大事件よりも，「靴下の穴をさっき他人に見られた」なんてことの方が，今の自分には大事かもしれませんよね．事件としては小さくても，経過時間が少なくて，まだ余り忘れてないからです．

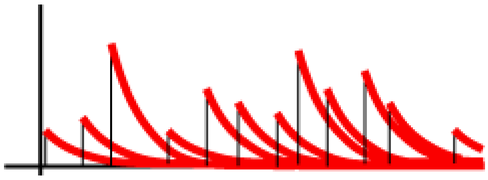


経過時間

川に落ちる　　靴下の穴

（大事件）　　（小事件）

ショックなできごとは，昔の三輪車事件と今日の靴下事件だけではないはずです．生まれてから今日まで，人生は事件の連続でしたね．



前のショックから

立ち直る前に

次のショックが･･･

心の中には，それぞれの事件の重大さ f (事件日)に忘却の関数 w (経過時間)がかかったものが蓄積されています．昔の恋はわずかな痛みとともに，昨日の恋はまだ立ち直れない大きな痛みとともに，どっちも心の中にあるはずです．

人生たたみこみ

すべての事件に，経過時間に応じた忘れ具合をかけて，生まれた日から今日まで全部足すと $\int_{\text{生まれた日}}^{\text{今日}} f(\text{事件日})w(\text{経過時間})d(\text{事件日})$ となりますね．これが現在の心境です．

ここで(事件日）を τ，（今日）を t と書いてみましょう．

d(事件日）は dτ です．（生まれた日）は $\tau = 0$ で良さそうですね．

経過時間は 事件日 τ から今日 t までの時間なので，$(t-\tau)$ となります．

$$\int_{\tau=0}^{\tau=t} f(\tau)w(t-\tau)d\tau$$

なんとこれがたたみ込みの定義です．

人生，たたみこみ．

＜＜積分が嫌いな人用足し算形のたたみこみもあります＞＞････････※１へジャンプ

＜＜ちょっと待て． $f(t-\tau)$ かける $w(\tau)$ じゃなかったっけ＞＞･･････※２へジャンプ

事件入力 $f(\tau)$ に忘却の度合い $w(t-\tau)$ を掛けて最初から今までの人生分積分したもの，それがたたみこみ．

電気回路なら，一瞬一瞬の電圧 $f(\tau)$ に対する回路の応答 $w(t-\tau)$ を掛けてスイッチオンから今まで 積分したもの，それがたたみこみ．

地球磁気圏なら，一瞬一瞬の太陽風入力 $f(\tau)$ に磁気圏の応答 $w(t-\tau)$ を掛けて太陽系の始まりから今まで 積分したもの，それがたたみこみ．

現在の応答には，今この時の環境だけでなく，今までの仕打ちに対する積り積った反応も含まれてるってことですよね．

■　実際に，たたみこみの計算の練習をしてみましょう

◆ 1　$f(t)=t$ と $g(t)=e^t$ のたたみこみを求めなさい．

$f(t)$ と $g(t)$ とのたたみこみ $f*g$ の定義は

$$f*g=\int_{\tau=0}^{\tau=t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

ですから，ただ代入して計算すればいいだけなんですが，$f(t-\tau)$ のとこがピンと来ない方が多いようですね．

$f(t)=t$ という関数は

$f(\quad)=(\quad)$　という意味です．だから

$f(0)=0$ だし，$f(1)=1$ だし，$f(a)=a$ だし，$f(t-\tau)=t-\tau$ なんです．

一方，$g(t)=e^t$ というのは，$g(\quad)=e^{(\ )}$ という意味です．だから $g(\tau)=e^\tau$ ですね．

あとは $f(t-\tau)$ のとこに $t-\tau$ を代入，$g(\tau)$ のとこに e^τ を代入して 積分するだけです．

$$f*g=\int_{\tau=0}^{\tau=t}(t-\tau)e^\tau d\tau$$

高校で習った「部分積分」などを使うとあっさり出来ますね．

積分の中では，変数は τ だけで，t は定数扱いということに気をつけて下さい．

＜＜部分積分も忘れた？＞＞・・・・・・・・・・・・・・※３にジャンプ

$f*g=g*f$ を使うという手もあります．

$f*g=g*f$ を使うと，もっと楽に出来る時もあるかもしれません．

$f*g$ のかわりに $g*f$ を計算するなら，

$$g*f=\int_{\tau=0}^{\tau=t} g(t-\tau)f(\tau)d\tau$$　ですが，

ここで　$g(t-\tau)=e^{t-\tau}=e^t e^{-\tau}$，$f(\tau)=\tau$ を代入すれば，

$$g*f=\int_{\tau=0}^{\tau=t} e^t e^{-\tau}\tau d\tau$$　ここで，e^t は定数扱いで外に出せるから

$$g*f=e^t\int_{\tau=0}^{\tau=t} e^{-\tau}\tau d\tau$$

こっちのほうが計算がちょっと速いかもね！(あんまりは変わらないけど)

◆２　$f(t)=\cos(kt)$ と $g(t)=\sin(kt)$ のたたみこみを求めなさい．（k は定数）

$f(t)$ と $g(t)$ とのたたみこみ $f*g$ の定義は

$$f*g=\int_{\tau=0}^{\tau=t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

ですから，ただ代入して計算すればいいだけです．
$f(t)=\cos(kt)$ という関数は，　$f(\quad)=\cos(k(\quad))$　という意味ですから
$f(t-\tau)=\cos(k(t-\tau))$ です．
一方，$g(t)=\sin(kt)$　ですから，$g(\tau)=\sin(k\tau)$ ですね．

よって　$f*g=\int_{\tau=0}^{\tau=t}\cos(kt-k\tau)\sin(k\tau)d\tau$

ここにでてきた $\cos(kt-k\tau)\,\sin(k\tau)$ は
高校で習った　$\sin(A+B)=\sin(A)\cos(B)+\cos(A)\sin(B)$
$\sin(A-B)=\sin(A)\cos(B)-\cos(A)\sin(B)$　を使うと

$\frac{1}{2}\{\sin(A+B)-\sin(A-B)\}$ の形，つまり　$\frac{1}{2}\{\sin(kt)-\sin(kt-2k\tau)\}$ と書き直せるので

$$f*g=\int_{\tau=0}^{\tau=t}\frac{1}{2}\{\sin(kt)-\sin(kt-2k\tau)\}d\tau$$　を積分すればいいですね．

積分の中では，変数は　τ だけで，t は定数扱いということに気をつけて下さい．

※１　＜＜積分が嫌いな人用足し算形のたたみこみ＞＞

世の中，積分が嫌いな方は多いようです．そんなあなたのために，積分を使わない「たたみこみ」の表現もあります．

すべての事件に，経過時間に応じた忘れ具合をかけて，生まれた日から今日まで全部足す，っていうのを，もっと地道に書いてみましょう．

あなたが今 21 才だとすると，生後 0 年の事件 $f(0)$ は，すでに 21 年前の出来事ですね．
生後 1 年の事件 $f(1)$ は，20 年前の出来事です．
生後 2 年の事件 $f(2)$ は，19 年前の出来事です．
：
生後 19 年の事件 $f(19)$ は，2 年前の出来事です．
生後 20 年の事件　$f(20)$ は，1 年前の出来事です．
生後 21 年の事件　$f(21)$ は，0 年前の出来事です．

それぞれの事件　$f(\text{その時})$ に 忘れ具合 $w(\text{経過時間})$ を掛けて, 生まれた年から今年 まで 全部足すと

$f(0)w(21)+f(1)w(20)+f(2)w(19)+\cdots+f(19)w(2)+f(20)w(1)+f(21)w(0)$

となりますね． 足し算を全部書くと面倒なので，全部足す記号 Σ を使って書くと

$\displaystyle\sum_{\text{生まれた年から}}^{\text{今年まで}}\{f(\text{事件の年})w(\text{経過時間})\}$ となります．これが現在の心境です．

ここで 事件の年 を τ，（今年）を t と書いてみましょう．（生まれた年）は τ = 0 で良さそうですね．経過時間は 事件日 τ から 今年 t まで の年数なので $t-\tau$ となります．

$\displaystyle\sum_{\tau=0}^{t}\{f(t)w(t-\tau)\}$ これが足し算形のたたみこみ $f*w$ です．

あれ，でも自分の持ってる本には $\displaystyle\sum_{\tau=0}^{t}\{f(t-\tau)w(t)\}$ って書いてあるよ，という方．

最初に書いた式とは $f(\quad)$，$w(\quad)$ の括弧の中が逆ですね．

さっきの足し算を，わざと 逆順に書くと

$f(21)w(0)+f(20)w(1)+f(19)w(2)+\cdots+f(2)w(19)+f(1)w(20)+f(0)w(21)$ f(21)となりますね．だから $\displaystyle\sum_{\tau=0}^{t}\{f(t-\tau)w(t)\}$ と書いても同じなんです．どっちも正しいってことです．

※2 <<ちょっと待て． $f(t-\tau)$ かける $w(\tau)$ じゃなかったっけ>>

入力 $f(t)$ に応答 $w(t-\tau)$ を掛けて最初 τ= 0 から 今 τ= t まで 積分したもの

$\displaystyle\int_{\tau=0}^{\tau=t} f(\tau)w(t-\tau)d\tau$ がたたみこみを表すのは分ったとして，

どの教科書を見ても， $f(t)$ と $w(t)$ とのたたみこみ $f*w$ の定義は

$\displaystyle\int_{\tau=0}^{\tau=t} f(t-\tau)w(\tau)d\tau$ って書いてあり，最初に書いた式とは $f(\quad)$，$w(\quad)$ の括弧の中が逆です．

しかしご安心ください．この二つは同じになります．

教科書に書いてある式 $f*w=\displaystyle\int_{\tau=0}^{\tau=t} f(t-\tau)w(\tau)d\tau$ を，わざと dτ を粗くして 地道に書くと，

$f(100)w(0)+f(99)w(1)+f(98)w(2)+\cdots+f(2)w(98)+f(1)w(99)+f(0)w(100)$

という感じですよね． t を 100，dτ を 1 にして書いてみました．

これは何も 逆順に足しても良いわけで，

$f(0)w(100)+f(1)w(99)+f(2)w(98)+\cdots+f(98)w(2)+f(99)w(1)+f(100)w(0)$

こう書くと，前のページにあった書き方 $\displaystyle\int_{\tau=0}^{\tau=t} f(\tau)w(t-\tau)d\tau$ すなわち $w*f$ と同じになることが分かるよね．変数変換が好きな人は，教科書の式 $f*w$ で $t-\tau$ を u などと変数変換しても良いです（ここで t は定数扱いなことに注意，$\tau=t-u$，$-d\tau=du$） $w*f$ と同じになります．

だから章末の練習問題や何かで $f(t)$ と $g(t)$ とのたたみこみを求めなさいっていう問題が出たときは，

$f*g$ か $g*f$ のどっちが楽に計算できるか考えて，楽なほうで計算するといいんだよ．

※３＜＜部分積分も忘れた？＞＞

部分積分忘れた？

部分積分は，「掛け算の微分を積分しなおすと，掛け算の微分が簡単な形に直せる」という技です．たとえばこういう積分 $\int_{\tau=0}^{\tau=t}(t-\tau)e^{\tau}d\tau$

なんだか嫌ですよね．どこが嫌かというと，積分のなかの，$t-\tau$ と e^{t} が掛け算になってるとこが嫌ですね．$t-\tau$ だけとか，e^{t} だけなら，積分してもいいんだけど．

部分積分

こんなとき使うのが部分積分．掛け算の積分を攻めるには，まず，掛け算の微分から行きます．

Ａ という関数と Ｂ という関数の掛け算 ＡＢ を微分すると

$(AB)'=A'B+AB'$ になります．これは出来る，知ってるっていう方が多いようです．

単にこの両辺を積分すると

$\int(AB)'d\tau=\int A'Bd\tau+\int AB'd\tau$ になりますね．∫とｄτ をつけただけです．

ここで，左辺は，微分して積分してるから元に戻っちゃいますよね．

よって $[AB]=\int A'Bd\tau+\int AB'd\tau$

ここで右辺を見ると，Ａ' と Ｂ とか，Ａ と Ｂ'とか，掛け算の微分になってます．

Ａ と Ｂ の組み合わせによっては，ＡＢ' の積分を計算するより，Ａ' Ｂ の積分を計算するほうが簡単なこともありますよね．こんなとき，この式を使えば $\int AB'd\tau$ を $\int A'Bd\tau$ で書き換えできますよね．

$\int AB'd\tau=[AB]-\int A'Bd\tau$ 定積分のときも同じです． $\int_0^t AB'd\tau=[AB]_0^t-\int_0^t A'Bd\tau$

この書き換え技を部分積分と呼んでおります．高校２年で習います．$\int AB'd\tau$ より $\int A'Bd\tau$ の方が簡単になるように使うのがコツです．逆に使うとかえって難しくなってしまい意味が無い．

使ってみよう

さっきの $f*g=\int_{\tau=0}^{\tau=t}(t-\tau)e^{\tau}d\tau$ の e^{t} のとこは，e^{t} の微分 $(e^{t})'$ と考えてもいいので

$$f*g=\int_{\tau=0}^{\tau=t}(t-\tau)(e^{\tau})'d\tau$$

部分積分を使って書き換えると，$f*g=[(t-\tau)e^{t}]_0^t-\int_{\tau=0}^{\tau=t}(-e^{\tau})d\tau$

積分の中では，変数は τ だけで，t は定数扱いなので後半が簡単になってラッキーですね．あとはτに代入して引けば $f*g=0-t+e^{t}-1$

Ⅱ　オイラーの公式

東北工業大学 情報通信工学科　中川朋子

理工系の大学や高専で必ず出てくる「オイラーの公式」

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

初めて見たときはびっくりしましたよね.

右辺はまだいいですよ. 実部が $\cos x$, 虚部が $\sin x$ の複素数ってことですよね.

i は２乗したら -1 になるやつ, 純虚数とか虚数単位とかいう名前でした.

わけわからないのは左辺ですね.

e の２乗とか３乗とか x 乗ならともかく, e の ix 乗とは？？

それに, 右辺の $\sin x$ や $\cos x$ と左辺の「e の何乗」って, 形がぜんぜん違うのに, , , ,

＜＜なぜこんなこと考えたかというと＞＞･･･････････※１

実は便利

けれども, これを納得できるなら,

微分積分の面倒な $\sin x$ や $\cos x$ を, 微分しても積分してもほとんど形の変わらない e^{ix} と e^{-ix} で書き換えられるので, すごく便利になりますよね.

＜＜使用例（ラプラス変換）＞＞･･････････※２

よくある証明

それでいろいろ探すと,

「$\cos x$ をテイラー展開するとああなって」

「$\sin x$ テイラー展開するとこうなって」

「$\cos x$ のテイラー展開+i かける $\sin x$ のテイラー展開が e^{ix} のテイラー展開と同じになる」

っていう説明が出てきますが,

(普通よくやるのは e^{ix} のテイラー展開でなく e^{x} をテイラー展開した後 x に ix を代入)

「テイラー展開って近似なんでしょ？」 と思うと,

「近似したもの同士が同じになったからって, 本物同士が同じかどうか判らないじゃん」

などという疑問が沸いてきちゃったりして, なんだかすっきりしませんね.

テイラー展開を使わない説明ってないでしょうか.

■　説明は２段階

今回の説明は２段階で行きます．

まず

（１）e^{ix} は $\cos x$ と $\sin x$ の１次結合，　つまり

$e^{ix} = A\cos x + B\sin x$（A,B は定数）の形に書いていいのか

（1 次結合とはパーツとなる関数に定数をかけて足したもの）

次に

（２）A, B は何か　（A = 1, B = i になる）　です．

指数関数 e^{ax} と三角関数 $\cos x$， $\sin x$ の微分ができて 3×3 行列の逆行列ができる人なら大丈夫です．（大学１年ってことだね）

■　１次

$A\cos x + B\sin x$　（A,B は定数）の形のことを， $\cos x$ と $\sin x$ の１次結合，といいます．

x とか $2x$ とか $2x+3$ みたいな式を，１次式といいますね．

詳しく言うと， x について，１次式です．

定数かける y は y について１次式です．

＜＜１次式とか２次式って？＞＞・・・・・・・・・・※３

■　１次結合

x の１次の項と y の１次の項 を結合した $2x+3y$ とか c_1x+c_2y c1 x + c2 y とか(c_1, c_2 は定数）の形のことを， x と y の１次結合 といいます．　つまり，違う素材を定数倍して足したものを１次結合といいます．たとえば，

ドレッシング＝　1×油＋1.5×酢＋0.1×塩

の右辺は，油と，酢と，塩を，それぞれ定数倍して加えただけなので，

油と，酢と，塩の１次結合です．

これを「ドレッシングは，油と酢と塩の１次結合で書ける」といいます．

野草園に写生大会に行くと，緑の絵の具がすぐなくなってしまいますが，

緑　＝　0.5×黄色　＋　0.5×青

で作れるので，実はあまり困りませんね．

これを「緑は，青と黄色の１次結合で書ける」といいます．

黄色を多めにして

黄緑　＝　0.7×黄色　＋　0.3×青

とすれば，黄緑も，青と黄色の１次結合で書けるし

青緑　＝　0.3×黄色　＋　0.7×青

とすれば，青緑も青と黄色の１次結合で書けます．

（$ay_1 + by_2$ は y_1 と y_2 の１次結合）

1次従属

上の例では，ドレッシングがなくても，油と，酢と，塩があれば困らないですよね．
「ドレッシングは，油と酢と塩の１次結合で書ける」
このことを，
「ドレッシングと油と酢と塩は１次従属である」と言います．
緑の絵の具がなくても，青と黄色があれば困らないですね．
「緑は，青と黄色の１次結合で書ける」
これを
「緑と，青と黄色は１次従属である」と言います．
「黄緑と，青と黄色も**１次従属**」「青緑と，青と黄色も**１次従属**」ですね．
つまり「１次結合で書ける」なら「１次従属」です．
（$y_3 = ay_1 + by_2$ なら y_3 と y_1 と y_2 は１次従属）

1次独立

けれども，青と黄色をどう混ぜても，赤は作れないですよね．
「赤は，青と黄色の１次結合で書けない」これを，
「赤と青と黄色は１次独立である」と言います．
赤も，青も，黄色も，無いと困る，不可欠なもの，ということです．
油と，酢と，塩の配合を工夫してもお砂糖は作れないですよね．
これを，「砂糖と油と酢と塩は１次独立である」と言います．
つまり「１次結合で書けない」なら「１次独立」です．
油と，酢と，塩の配合を工夫してもお砂糖は作れないですよね．
これを，**「砂糖と油と酢と塩は１次独立である」**と言います．
つまり「１次結合で書けない」なら「**１次独立**」です．

＜メンバーがかぶったあなたは１次従属＞

他のメンバーの組み合わせでかけちゃうのを１次従属，他のメンバーの組み合わせでかけないのを１次独立というわけですがバンドの中にギターが２名ダブってしまったあなた．ギターなら潤がいるし曲なら徹が書けるしコーラスはみんなできるし，じゃあ俺って，，，もしかして，居なくてもいいの？そんなあなたは一次従属．
伸吾はいいよな，ドラムはあいつだけだもんな．他の奴では出来ないし．そんな伸吾は一次独立．
できることなら，余人を以って代え難い，一次独立な存在になりたいですよね．
そんなバンドはさっさとぬけて自分の帝国とかつくったほうがいいかも，，
※　登場人物はフィクションです．

1次従属か1次独立か

そもそも気になっていたのは

e^{ix} を $\cos x$ と $\sin x$ の組み合わせで書いていいのか，つまり e^{ix} と $\cos x$ と $\sin x$ は1次従属なのか，それとも e^{ix} は $\cos x$ と $\sin x$ の組み合わせで書けない，つまり e^{ix} と $\cos x$ と $\sin x$ は1次独立なのか，ということでした．

ちょっと見た感じでは，左辺 e^{ix} と右辺 $\cos x$ や $\sin x$ はぜんぜん似てないので，１次独立（組み合わせで書けない）ような気もしますよね．

１次従属か，１次独立か，どうやって調べたらいいのでしょう．

１次従属

y_1, y_2, y_3 という３つの関数が１次従属のときは，$c_1 y_1 + c_2 y_2 = y_3$ （c_1, c_2 は定数）と書けます．

この右辺を移項して

$c_1 y_1 + c_2 y_2 - y_3 = 0$　　と書いてもいいですよね．

y_3 に掛かっている－１を c_3 とおいて $c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = 0$　と書いてもいいですよね．

y_1 を青，y_2 を黄色，y_3 を緑，と考えれば，

$c_1 = 0.5, c_2 = 0.5, c_3 = -1$ という組み合わせがあるので，

「y_1, y_2, y_3 が1次従属のときは，$c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = 0$ の c_1, c_2, c_3 に，$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 以外の組み合わせが存在する」ことになります．

一次独立

けれども，y_1 を青，y_2 を黄色，y_3 を赤，と考えると，

$c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = 0$ とするためには，$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ とするしかありません．

「y_1, y_2, y_3 が1次独立のときは，$c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = 0$ の c_1, c_2, c_3 は $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 以外ありえない」ことになります．

y_1, y_2, y_3 がお互いの組み合わせで書ける1次従属のときは，$c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = 0$ の c_1, c_2, c_3 に，$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 以外の組み合わせが存在し，

y_1, y_2, y_3 がお互いの組み合わせで書けない1次独立 のときは，$c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = 0$ なら $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 以外ありえない．

ということは，c_1, c_2, c_3 を調べれば，１次従属か1次独立か，わかりますね．

未知数３つに式ひとつでは

知りたい数値は c_1, c_2, c_3 の３つなのに，今，式が

$c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = 0$　のひとつしかありません．これでは c_1, c_2, c_3 は解けません．

そこで，この式を微分して，式を増やすんです．まず

$c_1 y_1' + c_2 y_2' + c_3 y_3' = 0$

そして

$c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_3 y_3'' = 0$

未知数３つなら式は３つ無いとね．

■　ロンスキー行列

この連立方程式を，行列を使って書いてみます．

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この３×３行列のことをロンスキー行列と呼びます．

（ロンスキー行列のことをロンスキアンともいうよ．ロンスキーのつづりは Wronsky なので頭文字を取って行列 W と書くことも多いよ）

もしも，このロンスキー行列に逆行列があるならば

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{（c1）}$$

とかけるので$c_1 = c_2 = c_3 = 0$になってしまいます．お互いの組み合わせでかけない一次独立ってことです．

■　逆行列が無いとき，って？

３×３行列Wの逆行列W^{-1}はWの余因子展開 を，Wの行列式$|W|$で割って求めます．

割り算の分母が０では割り算できないので，行列式が０のときは，逆行列はないんですね．

（余因子展開は忘れてても今は大丈夫）

（行列式は大学１年の代数幾何で習うよね）

■　ロンスキー行列で判別

つまりこういう流れになります．

「ロンスキー行列Wの行列式$|W| = 0$」なら

「ロンスキー行列Wの逆行列がない」ので

「$c_1 = c_2 = c_3 = 0$以外の組み合わせがある 」ので

「一次従属（組み合わせでかける）」

反対に「ロンスキー行列Wの行列式$|W|$が０でない」なら

「ロンスキー行列Wの逆行列がある」ので

「$c_1 = c_2 = c_3 = 0$」なので「一次独立（組み合わせでかけない）」

（|W|=0 なら一次従属　　|W|≠0 なら一次独立）

そもそも気になっていたのはe^{ix}を$\cos x$と$\sin x$の組み合わせで書いていいのか，つまりe^{ix}と$\cos x$と$\sin x$は１次従属なのか, それともe^{ix}は$\cos x$と$\sin x$の組み合わせで書けない, つまりe^{ix}と$\cos x$と$\sin x$は１次独立なのか，ということでした.

今なら判別方法がわかります.

$\cos x$と$\sin x$とe^{ix}のロンスキー行列Wを作ってみましょう.

ロンスキー行列

$\cos x$と$\sin x$とe^{ix}のロンスキー行列Wは

$$W = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x & e^{ix} \\ -\sin x & \cos x & ie^{ix} \\ -\cos x & -\sin x & -e^{ix} \end{pmatrix}$$

１行目と３行目が似てますね．マイナスがついただけみたい．こんなとき，行列式は０になります.

つまりロンスキー行列Wの行列式$|W|$が０なので，ロンスキー行列Wの逆行列がなく

$c_1 = c_2 = c_3 = 0$以外の組み合わせがあり，$\cos x$と$\sin x$とe^{ix}は一次従属

つまり　$e^{ix} = A\cos x + B\sin x$　の形に書ける，ということです.

その定数 A,B を求めましょう.

等号[＝]を使って書いてあるからには, この式はどんなときも成り立つわけで, 当然$x = 0$のときも成り立つので，$x = 0$を代入すると

$e^0 = A\cos 0 + B\sin 0$　だから　$1 = A + 0$　$\therefore A = 1$

また，元の式を微分すると

$ie^{ix} = -A\sin x + B\cos x$

これに$x = 0$を代入すると,

$ie^0 = -A\sin 0 + B\cos 0$　だから　$i = 0 + B$　$\therefore B = 1$

$A = 1, B = i$　を元の式に代入すれば

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$

これがオイラーの公式です.