センター試験

センター試験は壮大な虫食い算？

センター試験が近づいてきました．今回から，何号かにわたって，センター試験関連の話題を取り上げます．

「センター試験は壮大な虫食い算である」といった人がいます．つまり，解答の一部を穴埋めする形なので，必要十分性を考えなくてもよいということになります．

例えば，「すべての値で成り立つ」という表現があった場合，「すべての値で成り立つ」⇒「ある値で成り立つ」（逆は成り立たない）ということから，具体的な数値（しかもほとんどが整数）を代入して早回りして解答だけゲットできるということがしばしば起きます．

2010 年では次のような問題がありました．

> 一般に，すべての x について
> $\cos x=\sin(\boxed{シ}-x)$　である．
> $\boxed{シ}$ に当てはまるものを 1 つ選べ．
> ⓪ π　① $\dfrac{\pi}{2}$　② $-\dfrac{\pi}{2}$
> （数学ⅡB　1［2］）

「すべての x について」とあるので，

$x=0$ として　$\sin\boxed{シ}=1$ から $\boxed{シ}=\dfrac{\pi}{2}$

もちろん，こんな解答をする人はあまりいないとは思いますが，次の問題はどうでしょう．

> $xyz=1,\ x+\dfrac{1}{x}=a,\ y+\dfrac{1}{y}=b,\ z+\dfrac{1}{z}=c$
> のとき，$a^2+b^2+c^2-abc=\boxed{ア}$ である．

特殊解　$x=y=z=1$ を見つければ，
$a=b=c=2$ となり，与式$=4+4+4-8=4$

このような解答はセンター試験的には「是」になります．普通に同値変形して時間をかけてようやく解答に辿りついた生徒は，センター試験数学から見れば「負け組」の答案なのでしょうか．この点については，後で私見を述べることにします．

2010 年の数学ⅡB の数列の問題を取り上げてみます．

【数学ⅡB　3（数列）】

> 自然数の列　1，2，3，4，… を次のような群に分ける．
> 1 ｜ 2，3，4，5 ｜ 6，7，8，9，10，11，12 ｜ …
> 第1群　第2群　第3群
> ここで，一般に第 n 群は$(3n-2)$個の項からなるものとする．
> 第 n 群の最後の項を a_n で表す．
> (1)　$a_1=1,\ a_2=5,\ a_3=12,\ a_4=\boxed{アイ}$ である．
> $a_n-a_{n-1}=\boxed{ウ}n-\boxed{エ}$　$(n=2,3,4,\cdots)$
> が成り立ち，
> $a_n=\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{オ}}n^{\boxed{キ}}-\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{ク}}n$　$(n=1,2,3,\cdots)$　である．

この問題の流れを解釈すると，

「n 群の最後の項－$(n-1)$ 群の最後の項＝n 群の項の数」から $a_n-a_{n-1}=3n-2$ がわかり，そこから項の番号を上げて $a_{n+1}-a_n=3n+1$　を作り，階差数列の公式から a_n を導かせるというものだと思われます．

しかし，最初に a_4 を計算させているので，受験生は次のように「誘導」されます．

まず書上げにより，$a_4=22$ がわかり，1, 5, 12, 22

この階差をとると，4, 7, 10 となり初項 4，公差 3 の等差数列と類推されるので，a_n-a_{n-1} を経ずに a_n が導かれます（つまり多くの受験生いとっては，a_n-a_{n-1} はむしろミスディレクションといえる）．結果十分性が確保されない答案ができあがります．

このような群数列の問題に対しては「いくつかの項を拾って類推」ではなく「n 群までの項の個数を考える」ことを柱とすべきで，a_n を求めるなら，普通は次のような流れになります．第 n 群までの項の個数は

$$1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)=\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n$$

これは，a_n と一致するので　$a_n=\dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{1}{2}n$

これなら，この問題のように「項の番号と項の値が一致している」特別な場合でなくても解くことができるし，何も a_n-a_{n-1} を経由し階差数列に持っていく必要はなく簡単に終わります．紙面が尽きました．この続きは次号で．

（すうがく通信 17 号より）

数学的メタ認知

【数学ⅡB　3（数列）】

自然数の列　1，2，3，4，… を次のような群に分ける．

1 ｜ 2，3，4，5 ｜ 6，7，8，9，10，11，12 ｜ …

第1群　第2群　第3群

ここで，一般に第 n 群は$(3n-2)$個の項からなるものとする．

第 n 群の最後の項を a_n で表す．

(1)　$a_1=1$，$a_2=5$，$a_3=12$，$a_4=$ $\boxed{\text{アイ}}$ である．

$a_n-a_{n-1}=\boxed{\text{ウ}}n-\boxed{\text{エ}}$ $(n=2,3,4,\cdots)$

が成り立ち，

$a_n=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{オ}}}n^{\boxed{\text{キ}}}-\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{ク}}}n$ $(n=1,2,3,\cdots)$　である．

前回に引き続き，2010 年の数列の問題を見ていきます．

a_n-a_{n-1} が１次式なので，a_n は２次式であることがわかります．すると，ローカルな範囲での類推を是とすれば，次のようにして a_n を求めることもできます．

$a_n=pn^2+qn$ とおくと，$a_1=1$，$a_2=5$ から

$\begin{cases} p+q=1 \\ 4p+2q=5 \end{cases}$　これを解いて，$p=\dfrac{3}{2}$，$q=-\dfrac{1}{2}$

よって，$a_n=\dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{1}{2}n$

では(2)を見てみましょう．

(2) $n=1,2,3,\cdots$ に対し，第 $n+1$ 群の小さい方から$2n$ 番目の項を b_n で表すと

$b_n=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{セ}}}n^{\boxed{\text{タ}}}+\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}n$　であり，

$\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+\boxed{\text{ナ}}}\right)$

こうなると，最早まともに解こうという気がしません．

$\dfrac{1}{b_n}$ の形から，b_n は２次式と察しがつくので，

$b_n=pn^2+qn$ とおくと

$n=1$ のとき

第２群の小さい方から２番目の項は３より，$b_1=3$

$n=2$ のとき

第３群の小さい方から４番目の項は９より，$b_2=9$

このことから、$\begin{cases} p+q=3 \\ 4p+2q=9 \end{cases}$　$\therefore p=q=\dfrac{3}{2}$

つまり，$b_n=\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{3}{2}n$　答

よって，$\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{2}{3n(n+1)}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$　答

私は，この問題を通して，センター試験の作題の問題点を糾弾するつもりはありませんし，ましてや，虚をつく裏技的手法を奨励しようというわけでもありません．

私がいいたいのは次の２点です．

一つは，現在のセンター試験の作題は，解く技能だけでなく読解力を見ようという形になっているということです．つまり，解法パターンをたくさん覚えることだけが数学の力ではなく，与えられている問題の文脈から，解法の流れに乗っていける力，すなわち思考力と判断力を身につけて欲しいというメッセージが，センター試験の問題から発信されているように思うのです．

従って，二つ目としていいたいことは，そのような力をつけるには「～を見たら～のパターン」という，分解練習と技能偏重型の問題演習だけでは限界があるということです．あまり良い例ではありませんが，

$f(x)=x^2-2ax+4$ は，$f(x)=(x-\boxed{\text{ア}})^2-\boxed{\text{イ}}^2+4$ と変形できるので，$f(x)=0$ が異なる２つの実数解を持つための条件は，$a<\boxed{\text{ウエ}}$ または $\boxed{\text{オ}}<a$ である．

という問題を考えるとき，せっかく平方完成して頂点を求める形に誘導しているのに，**「異なる２つの実数解を持つ」**を見て**「判別式＞０」**と反応して解いていくのが，パターン分解型の解法といえると思います．

一つの問題に対して，教科書のどの部分と関わっているか考えること，別解など多角的なアプローチを試み，他の単元との関連を示すこと，問題の背景を知ること，などから，思考の楽しさや，数学の良さを生徒に伝え，結果として問題を解く力も身につくと思います．そして，センターの特殊性を逆手にとった，裏技的な解法は，そういう広い視点で数学と関わる中で生まれる「数学的メタ認知」ともいうべき力と捉えておきたいと思います．

（すうがく通信 18 号より）

根底には問題文の読解力がある

前回述べたことを踏まえつつ，もう一問数列の問題を眺めてみたいと思います．2011 年の問題です．

【2011　数学ⅡB　数列】（前半部分）

数直線上で点Pに実数 a が対応しているとき，a をPの座標といい，座標が a である点Pを $P(a)$ で表す．
数直線上に $P_1(1)$，$P_2(2)$ をとる．線分 P_1P_2 を３：１に内分する点を P_3 とする．一般に，自然数 n に対して，線分 P_nP_{n+1} を３：１に内分する点を P_{n+2} とする．
点 P_n の x 座標を x_n とする．

$x_1=1$，$x_2=2$ であり，$x_3=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である．

数列 x_n の一般項を求めるために，この数列の階差数列を考えよう．
自然数 n に対して，$y_n=x_{n+1}-x_n$ とする．

$y_1=\boxed{ウ}$　$y_{n+1}=\dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}}y_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ である．

したがって，$y_n=\left(\dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}}\right)^{\boxed{キ}}$ であり

$x_n=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}-\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{ケ}}\left(\dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}}\right)^{\boxed{サ}}$　となる．

ただし，$\boxed{キ}$ $\boxed{サ}$ については当てはまるものを次の⓪から③の内から一つずつ選べ．同じものを繰り返し選んでもよい．

⓪　$n-1$　①　n　②　$n+1$　③　$n+2$

（後半部分）

$S_n=\sum_{k=1}^{n}k|y_k|$ を求めよう．$r=\left|\dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}}\right|$ とおくと

$S_n-S_{n-1}=\sum_{k=1}^{\boxed{シ}}r^{k-1}-nr^{\boxed{ス}}$　であり，したがって

$S_n=\dfrac{\boxed{セソ}}{\boxed{タ}}\left\{1-\left(\dfrac{1}{\boxed{チ}}\right)^{\boxed{ツ}}\right\}-\dfrac{n}{\boxed{テ}}\left(\dfrac{1}{\boxed{ト}}\right)^{\boxed{ナ}}$

となる．シスツナについては当てはまるものを以下から選べ．同じものを繰り返してもよい．

⓪　$n-1$　①　n　②　$n+1$　③　$n+2$

この問題で解法技術を問う部分は，前半では，**「階差数列から一般項を求める」**過程，後半では，**「等差×等比型の数列の和を求める」**過程のたった２つだけです．

これらは，いわゆる受験の定番問題なので，多くの進学校では繰り返し行われているはずです．ところが，全く手がでなかったという受験生が多かったのです．

その原因は，やはり問題の読解力にあると推察できます．

受験生に感想を聞くと，「読んでいて意味が理解できなかった」とか，「誘導に乗って，なんとか漸化式　$x_{n+2}=\dfrac{3x_{n+1}+x_n}{4}$ までは作ったが，隣接３項間なのでわからなくなった」などというものでした．

この問題は，閉区間[1, 2]から始めて，区間の幅を 1/4 に縮めた縮小列を次々作るということがテーマです．そこに気づけば，前半はマークの時間を入れて３分で片付きます．あるいは，y_n の漸化式の形から，y_n は等比数列であることがわかるので，

$x_1=1, x_2=2, x_3=\dfrac{7}{4}$ から，$y_1=1, y_2=-\dfrac{1}{4}$ の２項（２項で十分！）

を求めて解いていくことも可能です．

後半部分のポイントは表現の仕方です．数列の和は，

$a_1+a_2+\cdots+a_n$ と書きならべて表記する場合，S_n として n の式で表される場合，そしてΣでまとめる場合の３通りあります．これらが互いに関連され理解しているかどうかがポイントではないかと思います．

最後に，この問題の背景にも触れておきましょう．

有界閉区間 $I_0=[1,2]$ に対して

$I_1=\left[\dfrac{7}{4},2\right]$，$I_2=\left[\dfrac{7}{4},\dfrac{29}{16}\right]$　……という縮小列は

$I_0\supseteqq I_1\supseteqq I_2\supseteqq I_3\supseteqq\cdots\cdots$ を満たしています．

$|y_n|$ は区間の幅のことで，

$y_n=\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$　なので　$\lim_{n\to\infty}|y_n|=0.$

このように，縮小列の幅が０に収束するとき，閉区間の縮小列はただ一つの実数を定めます．つまりどの I_n にも属する点がただ１つ（この問題では $\dfrac{9}{5}$）存在することがいえます．これを「区間縮小法の原理」（有界閉区間の玉ねぎ構造には必ず芯がある）といいます．

これは，大学で実数の連続性や閉区間のコンパクト性（ハイネ･ボレルの被覆定理）などを示す際の根幹となる原理の一つです．

センター試験では，高度な数学的概念や，図形の操作などから得られる数理的現象を，高校数学のレベルで思考し記述するという問題がよく出題されます．今後，この傾向は加速していくのではないかと思われます．

（すうがく通信 19 号より）

概念を軽視して解法の技術に走ることの問題

今回は，2010 年の三角関数の問題を見てみます．

【数学ⅡB　1［2］（三角関数）】

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲で　$\sin 4\theta=\cos\theta$ ……①　を満たすθと $\sin\theta$ の値を求めよう。

一般に、すべての x について　$\cos x=\sin(\boxed{シ}-x)$ である。

$\boxed{シ}$に当てはまるものを次の⓪～②のうちから一つ選べ。

⓪　π　①　$\frac{\pi}{2}$　②　$-\frac{\pi}{2}$

したがって，①が成り立つとき，$\sin 4\theta=\sin(\boxed{シ}-\theta)$ となり，

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲で4θ，$\boxed{シ}-\theta$ の取りうる値を考えれば，

$4\theta=\boxed{シ}-\theta$ または $4\theta=\pi-(\boxed{シ}-\theta)$ となる。

よって、①を満たすθは、$\theta=\frac{\pi}{\boxed{ス}}$ または $\theta=\frac{\pi}{\boxed{セソ}}$ である。

ここでのテーマは、$\sin x=\sin y$ の解き方です．

私は次のように指導しています．

①$\sin x=\sin y$ 型　$\begin{cases} x=y\ (動径一致) \\ x=\pi-y\ (動径逆サイド) \end{cases}$

とやりたいところだが、何回転かして動径が一致する場合もあるので、次のように書き換える

$\begin{cases} x=y+2n\pi\ (動径一致) \\ x=\pi-y+2n\pi\ (動径逆サイド) \end{cases}$

②$\cos x=\cos y$ 型　$\begin{cases} x=y\ (動径一致) \\ x=-y\ (動径逆サイド) \end{cases}$

これも何回転か分を考慮してまとめると

$x=\pm y+2n\pi$ となる。

③$\sin x=\cos y$ 型　この場合は、余角の三角比

$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$，$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$

を用いて、①②のタイプに持っていく．

以前，ある試験の作題を担当して，

$\sin 4\theta=\sin\theta$　$(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2})$ を解けという問題を出題したところ，検討者から非難ごうごうだったことがあります．これは，２倍角の公式を２度用いなければならないので難しすぎるというのです．

しかし，私はそんな２倍角の公式などは意図していなくて（本当は $\sin 7\theta=\sin 4\theta$　としたかったくらい），動径の位置で角を比較する，全く教科書に忠実な問題を作ったつもりでした．

教科書にある自然な考えを敢えて用いず，何でも技巧的にパターン化してしまうのは，センター試験の作題者の落とし穴にまんまとハマることなのではないかと思います。

解答　$\sin 4\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$　より

（ⅰ）動径一致のとき

$4\theta=\frac{\pi}{2}-\theta+2n\pi$ より　$5\theta=\frac{1+4n}{2}\pi$

$\therefore\theta=\frac{4n+1}{10}\pi=\frac{\pi}{10},\frac{5}{10}\pi,\cdots\cdots$

条件にあうのは、$\theta=\frac{\pi}{10}$　答

（ⅱ）動径逆サイドのとき

$4\theta=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+2n\pi$ より

$\theta=\frac{4n+1}{6}\pi=\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi,\cdots\cdots$

条件にあうのは　$\theta=\frac{\pi}{6}$　答

【問題の後半】

$\sin\frac{\pi}{\boxed{ス}}=\frac{\boxed{チ}}{\boxed{タ}}$　である。$\sin\frac{\pi}{\boxed{セソ}}$の値を求めよう。

①より　$\boxed{ツ}\sin 2\theta\cos 2\theta=\cos\theta$ となり，この式の左辺を2倍角の公式を用いて変形すれば

$(\boxed{テ}\sin\theta-\boxed{ト}\sin^3\theta)\cos\theta=\cos\theta$　となる。

ここで，$\cos\theta>0$ であるから

$\boxed{ト}\sin^3\theta-\boxed{テ}\sin\theta+1=0$　……②　が成り立つ。

$\sin\theta=\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$ は②を満たしている。

$\theta=\frac{\pi}{\boxed{セソ}}$ とすると，$\sin\theta\neq\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$ であるから

$\boxed{ナ}\sin^2\theta+\boxed{ニ}\sin\theta-1=0$　となる。

ここで、$\sin\frac{\pi}{\boxed{セソ}}>0$ より，

$\sin\frac{\pi}{\boxed{セソ}}=\frac{\boxed{ヌネ}+\sqrt{\boxed{ノ}}}{\boxed{ハ}}$　である。

ここでのテーマは$\sin\frac{\pi}{10}$ の値を求めるということ．

気のきいた受験生で，$\sin 18^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ を知っていれば，

$t=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ から最小多項式　$4t^2+2t-1=0$ を得て，

逆に答えを辿ることもできます．

紙面が尽きました.続きは次号で.

（すうがく通信 20 号より）

パターン学習と有意味学習は二律背反か

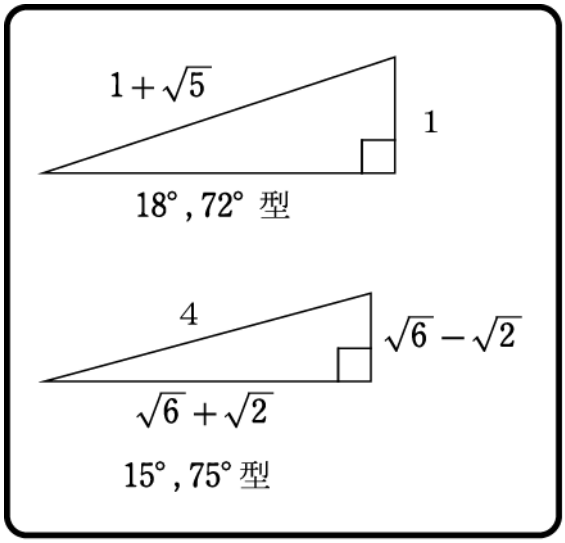
先日，ある先生から，このセンター試験特集は，裏技的解法を否定するふりをしながら，実は推奨しているのではないか，という鋭い指摘がありました．

私は，センター試験の，無用とも思える長い誘導は，「読解力と判断力を見るための有効な手続き」と積極的に評価し，裏技的手法から無節操に解けてしまう問題については「文脈から，演繹するだけでなく，帰納的に考えたり，仮説設定したり，類推したり，逆方向から見たりするなどのメタ認知的な力も数学」などと，センター試験の側に立つ視点で論じてきました（まあ，ある意味センター試験を買い被っているわけですが）．

ただ，私が強調したいことは，やみくもに，センターの過去問パターンや，裏技的手法を丸覚えしても効果は薄く，肝心なのは，頭の引き出しにしまわれているそれらの断片に，適正にアクセスして適応・応用させていく力があるかどうかということだと思います．

では，どうすればそのような力がつくのでしょうか．

例えば，前回$\sin 18^\circ$の値が出てきましたが，センター試験に向かう前に，受験生の常識として下の２つの三角形を覚えさせたいとします．



例えば，この三角形を使う問題を何度も演習し，できるまで課題を与えたり，再テストを繰り返すといったトレーニング型の学習法だけで，果たして定着されるものでしょうか．センター試験の問題を解ききる力は，似た問題をたくさんやったという量に依存するという考えに，もし，教師や生徒が縛られているならば，岩手の高校数学は危ういと思います．

ならば，18°，72°型の三角形は，正五角形の作図法や黄金比の話，また，18°と15°から，加法定理を用いれば3°刻みの三角比の表が作れる話など，概念を補強する話題を取り入れた授業を行うことで効果は期待されるのでしょうか．私はそれにも否定的な考えです．

既存の知識が不足している中で，面白味のある授業だけを繰り返しても問題を解く技能が磨かれていくとは思えないからです．

私がいいたいのは，センター試験への対策として，パターン演習やドリル型の学習と，有意味学習を行うことは決して二律背反ではないということです．その両者はバランス良く融合すべきであり，一方に偏る指導でなんとかなるほど「センター試験は甘くない」と思うのです．

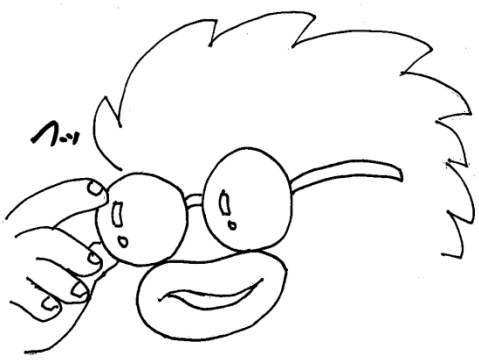
センター試験は，限られた時間の中で，最大の力を発揮しなければならない，ある種異常な空間で行われる競争試験です．それを乗り越えるには，多くの解法パターンを身につけ，素早く解く技術を磨くことは絶対に必要でしょう．しかし，そのような学習法の蓄積が，大局的に問題を俯瞰したり，問題をメタ認知する力を産み出すかは別問題です．むしろそれは，日々の授業の中で，数学に対する向き合い方や，知識を転移させる有意味学習が展開されていることが大事ではないかと思うのです．

本通信の第４号でも紹介した**「間違いだらけの学習論」（西林克彦）**の中で，「詰め込み教育」の問題点は「詰め込まないこと」という非常に興味深い記述があります．

頭の中に知識や情報が整然と「積み込まれて」いることは，人の生活を豊かにし，喜ばしいことなのに，世間では「詰め込み教育」は，応用がきかない，すぐ忘れるといった悪い意味で用いている．それは，詰め込み教育が，実は知識をきちんと詰め込んでいないことによる問題であると氏は述べています．そして，「詰め込まない詰め込み教育」の特徴点として，「公式を同じように知っていても，できる人とできない人がでてくるのは，公式を適用・運用するための補助知識に差がある」「理解されていない知識はいくら反復学習しても理解にはならない」などということを指摘しています．

例えば，p, r, s, k, l など脈絡のないアルファベットの羅列を覚える場合は，「詰め込む」情報量はなるべく少ない方が楽であり，何度も繰り返せばよく覚えられます．しかし，有意味材料の場合は事情が異なり，「力持ちの男がペンキのハケを洗った」という文章より，「力持ちの男が，バーベルを塗るのに使ったペンキのハケを洗った」という「詰め込む」情報量を増やした方が覚えやすいという実験結果などを紹介しています．

（すうがく通信 21 号より）



アブダクティブな方法論

前回は，センター試験の裏技の話になってしまいましたが，それを補足する意味で今回は，命題と条件の問題にスポットを当てたいと思います．

【2011　数学ＩＡ　第１問　［２］】

実数 a，b に関する条件 p，q を次のように定める

p：$(a+b)^2+(a-2b)^2<5$

q：$|a+b|<1$ または $|a-2b|<2$

(3)　p は q であるための［ト］

［ト］に当てはまるものを次の⓪～③から選べ

⓪　必要十分条件である

①　必要条件であるが十分条件ではない

②　十分条件であるが必要条件ではない

③　必要条件でも十分条件でもない

注　実際は(1)(2)が(3)の誘導になっていますが，ここでは，(3)のみ取り上げました．

このような問題について，次のように指導をする先生がいます．「条件の問題は４択なので，わからなかったら考え過ぎず最後にまわす．時間がなくなった時はカンでマーク．それでも 1/4 の確率で当たる」

これは，私のいう裏技ではありません．

私が考える「裏技」を使えば，「十分条件」と予想がつきます．それは裏技というより「常識」です．命題「p ならば q」が真の場合，条件 p を満たす真理集合は，条件 q を満たす集合に包含されていなければなりません．ですから，条件 p と条件 q が述べている世界の大きさを比較すれば，必要条件か十分条件かアタリをつけることは可能です（もちろん例外はあるので要注意）．

この問題では，q が「または」を含む条件になっていることや，p の条件式の不等式の向き（<）から見て，

（p の集合）⊂（q の集合）

つまり，$p \Rightarrow q$ が真であることが予想できるわけです．

極端な例をあげると，「$\overline{p}$ または q であることは，r かつ s であるための○○条件」なんていう問題は，明らかに仮定の部分が結論を包含していると思われるので，必要条件である（少なくとも十分条件ではない）と予測できるわけですね．このことを踏まえて次の問題を「裏技」だけで考えてみて下さい．

【2008　数学ＩＡ　第１問　［２］】

自然数 m，n について，条件 p，q，r を次のように定める．

p：$m+n$ は２で割り切れる

q：n は４で割り切れる

r：m は２で割り切れ，かつ n は４で割り切れる

「p または q」は r であるための［シ］

（⓪～③は前問と同じ）

【2009　数学ＩＡ　第１問　［２］】

実数 a，b に関する条件 p，q，r を次のように定める

p：$a^2 \geqq 2a+8$

q：$a \leqq -2$ または $a \geqq 4$

r：$a \geqq 5$

(2)　次の［ケ］，［コ］に当てはまるものを次の⓪～③から選べ．同じものを繰り返し選んでもよい．

命題　「p ならば［ケ］」は真である

命題　「［コ］ならば p」は真である

⓪　q かつ $\overline{r}$　①　q または $\overline{r}$

②　$\overline{q}$ かつ $\overline{r}$　③　$\overline{q}$ または $\overline{r}$

解答　シ①　ケ①　コ⓪

私がいいたい「裏技」とは，命題「A ならば B」において，A，B のどちらが**部分**でどちらが**全体**か（**部品**と**製品**でも可）という視点に立って，文脈から「または」「かつ」「補集合」などの言葉を手繰り寄せながら類推することです．これは，本質を押さえて勉強していないと生じない発想であり，見たことがない問題に対処するためのアブダクティブな方法論の一つだと思います．

余談ですが，昨年の大晦日のテレビ番組で高校生のディベートをやっていました「A：同い年での会話はタメロ」「B：同い年であっても敬語」というテーマで喧々囂々と議論していました．最後に投票でジャッジするのですが，私は見ていて明らかに A に軍配が上がると思っていました．なぜなら，論じているうちに，A が B の補集合になっていったからです．つまり，「時々はタメロでもいい」などという人は A の肩を持つはずだからです．もしも，B が「同い年でも敬語での会話もアリ」という形であれば B に軍配が上がったのでしょうけど．こんなロジックにひっからないためにも数学は必要かなと思った年の暮れでした．

（すうがく通信 22 号より）

差の式の考え方

昨年度もこの時期，センター試験特集を行い，三角関数，数列，論理などの話題を取り上げました．

今回は，昨年度のセンター試験の微積分の問題をとりあげてみたいと思います．

第2問

座標平面上で曲線 $y=x^3$ を C とし，放物線 $y=x^2+px+q$ を D とする．

(1)　曲線 C 上の点 $P(a\,,\,a^3)$ における接線の方程式は

$y=3a^{\boxed{ア}}x-\boxed{イ}a^{\boxed{ウ}}$

である．放物線 D は点 P を通り，D の P における接線と，C の P における接線が一致するとする．このとき p と q を a を用いて表すと

$$\begin{cases} p=3a^{\boxed{エ}}-\boxed{オ}a \\ q=\boxed{カキ}a^3+a^{\boxed{ク}} \end{cases} \quad \cdots\cdots① \quad となる．$$

以下 $p\,,\,q$ は①を満たすとする．

P における「値」と「接線の傾き」を比較する共通接線の定番問題ですね．

【解答例】

$y'=3x^2$ より　曲線 C 上の点 $P(a\,,\,a^3)$ における接線の傾きは $3a^2$ より求める接線の方程式は

$y-a^3=3a^2(x-a)$　$\therefore y=3a^2x-2a^3$　答

$f(x)=x^3\,,\,g(x)=x^2+px+q$ とすると条件より

※ $\begin{cases} f(a)=g(a) & \cdots\cdots\cdots 値の一致 \\ f'(a)=g'(a) & \cdots\cdots\cdots 傾きの一致 \end{cases}$

よって $\begin{cases} a^3=a^2+pa+q \\ 3a^2=2a+p \end{cases}$

整理して $\begin{cases} p=3a^2-2a \\ q=a^3-a^2-pa=-2a^3+a^2 \end{cases}$　答

さて，ここで，D の P における接線を微分を経由せずに求める方法で解いてみましょう．

【別解】

D 上の接線は　$\underline{y=x^2+px+q-(x-a)^2}$　※

$\therefore\quad y=(2a+p)x+q-a^2$

これと $y=3a^2x-2a^3$ を比較して

$\begin{cases} p=3a^2-2a \\ q=a^3-a^2-pa=-2a^3+a^2 \end{cases}$　答

ポイントは※ 印部分の変形です．

一般に，２次関数 $y=ax^2+bx+c$ の，$x=\alpha$ における接線の方程式は，$y=ax^2+bx+c-a(x-\alpha)^2$　となるのですが，ここで述べたいのは，そのような裏技的技巧ではありません．９月に実施した，「進学指導を考える数学・課題別セミナー」の講座でお話した，「差の式による関数の組み換え」について補足したかったので，今回，この問題をとりあげました．

● **差の式のつくり方とその意味**

例えば，$y=2x^2-4x$ の $x=3$ における接線の方程式が，なぜ，$y=2x^2-4x-2(x-3)^2$ となるのかは，次のようにして生徒に説明し，納得させます．

$f(x)=2x^2-4x$ の $x=3$ における接線を $g(x)$ とおく．

$f(x)=g(x)$ を解くと x^2 の係数が２の2次方程式となり

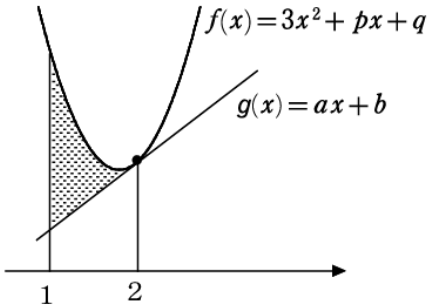
その解は $x=3$ （重解）なので，

$f(x)-g(x)=2(x-3)^2$ となるはず．

よって，$g(x)=f(x)-2(x-3)^2$　$\therefore g(x)=8x-18$

このアイデアが理解できれば，放物線と接線で作られる図形の面積は，以下のように解くことができます．

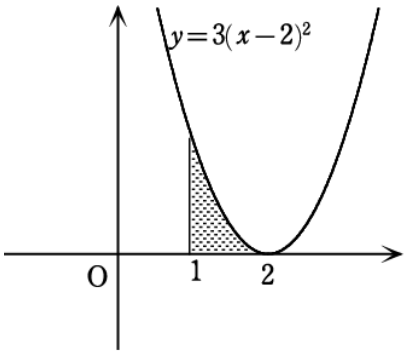
問　図の網掛け部分の面積を求めよ．



$f(x)-g(x)=3(x-2)^2$　なので

$S=\int_1^3 3(x-2)^2dx=\Big[(x-2)^3\Big]_1^2=1$

上の方法は，それぞれのグラフと x 軸と囲まれた部分の面積の差分とは逆に，先に差の関数　$y=3(x-2)^2$ を作って，その組み替えた関数と x 軸で囲まれる図形の面積を求めているということです（定積分の線形性が効いている）．紙面がつきました，この話の続きは次号で．

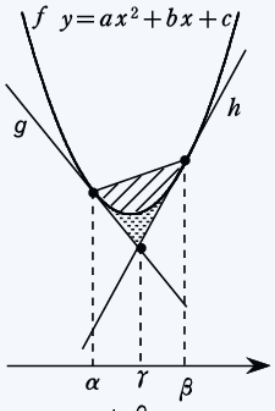


（すうがく通信 57 号より）

放物線と接線の定番問題

前回は，差の式と関数の組み換えについての話でした．センター試験には，２次関数と接線に関する問題として，次に示すような２つのタイプの問題がしばしば登場します．

【１】１つの放物線と２つの接線

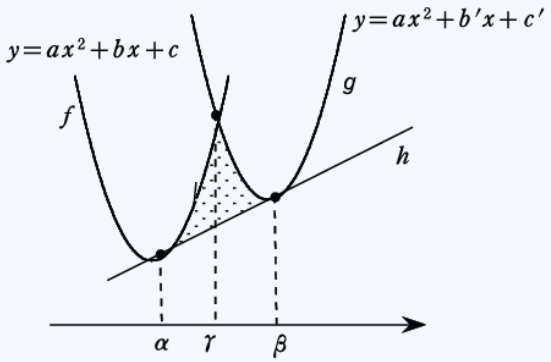


① $\gamma=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ である（等間隔性）

② 斜線部分と打点部分の面積比は
２：１である．
斜線を S，打点を T とすると
$S=\dfrac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$　$T=\dfrac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3$

③ 斜線及び打点で表される図形は
直線　$x=\gamma$ で二等分される．

【２】x^2 の係数が等しい２つの放物線と１つの接線

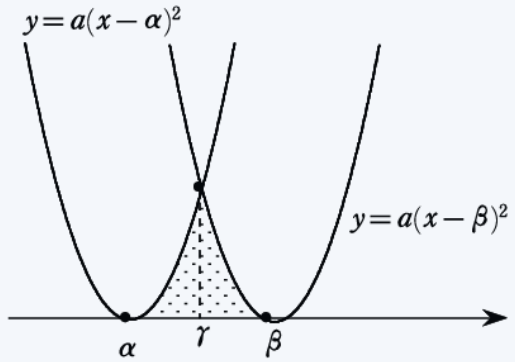


①③は【１】と同じ．

② 打点部分の面積をTとすると
$T=\dfrac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3$

【１】【２】を並べてみせてその類似性を示すだけでは，概念の理解には到達しません．次の【３】のような差の式によって関数を組み替えてみることで統一的に見ることができ，応用力が育つと思います．

【３】【１】【２】を結びつけるグラフ



【１】において $f-g=a(x-\alpha)^2$
$f-h=a(x-\beta)^2$なので，２つの直線を x 軸に重なるように移動したとき【３】のグラフになる．このように移動しても，面積や，α,β,γ の位置関係は保存されている．

一方，【２】において $f-h=a(x-\alpha)^2$
$g-h=a(x-\beta)^2$　なので，直線 h を x 軸に重なるように傾ければ【３】になる．

面積はいずれも次の計算で示される．

$$S=\int_\alpha^\gamma a(x-\alpha)^2dx+\int_\gamma^\beta a(x-\beta)^2dx$$
$$=\frac{a}{3}\Big[(x-\alpha)^3\Big]_\alpha^\gamma+\frac{a}{3}\Big[(x-\beta)^3\Big]_\gamma^\beta$$
$$=\frac{a}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3-\frac{a}{3}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^3$$

最後に応用問題をあげておきます．

(1)　$(1,0),(3,0)$ を通り，$y=-x$ に接する２次関数を求めよ．

(2)　(1)で求めた２つの２次関数と，接線$y=-x$ で囲まれる図形の面積を求めよ．（岩手大）

＜略解＞

(1)　$y=a(x-1)(x-3)$ とおいて，$y=-x$ と連立させ，$D=0$ より，$a=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$

(2)　このとき接点の x 座標は，$\pm\sqrt{3}$ より
$a_1=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$，$a_2=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$ おくと
求める面積Sは

$$S=\int_{-\sqrt{3}}^{1}a_2(x+\sqrt{3})^2dx+\int_1^{\sqrt{3}}a_1(x-\sqrt{3})^2dx$$
$$=\frac{a_2}{3}(1+\sqrt{3})^3+\frac{a_1}{3}(1-\sqrt{3})^3$$

以下計算は省略．

（すうがく通信 58 号より）

格子平面で解決する

今回からしばらく，2013 年のセンター試験の問題を取り上げていきたいと思います．では，ⅡＢの第１問から見ていきましょう．

第１問

［１］Ｏを原点とする座標平面上に２点A(6 , 0), B(3 , 3)をとり，線分ABを２：１に内分する点をP，１：２に外分する点をQとする。

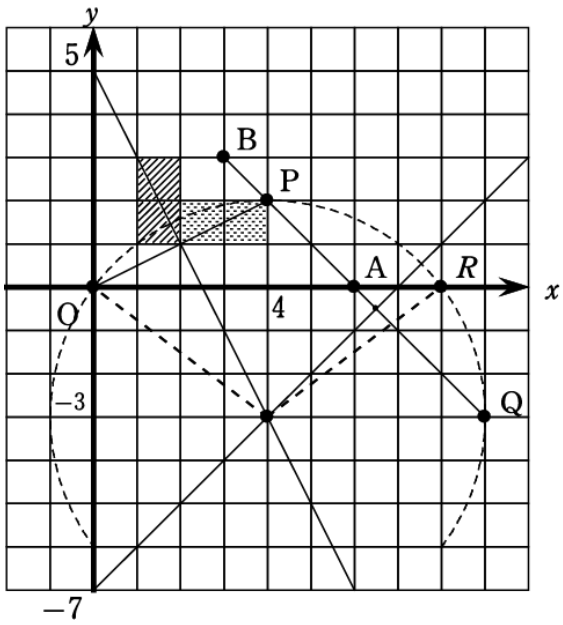
(1) Pの座標は(ア , イ)であり，Qの座標はQ(ウ , エオ)である。

(2) 円Cの方程式を次のように求めよう。線分OPの中点を通り，OPに垂直な直線の方程式は　$y=$ カキ $x+$ ク　であり，線分PQの中点を通り，PQに垂直な直線の方程式は　$y=x-$ ケ　である。
これらの2直線の交点が円Cの中心であることから円Cの方程式は，
$(x-$ コ $)^2+(y-$ サ $)^2=$ シス
であることがわかる。

(3) 円Cとx軸の二つの交点のうち，点Oと異なる交点をRとすると、Rは線分OAを セ ：１に外分する。

図形と方程式（直線と円）の問題が出題されました．

この問題の全体像を見ると，特徴的なことがわかります．それは「解答がすべて整数である」ということです．そこで，この問題は，格子平面上への図示だけで解決できるのではないかという思いが浮かびます．



私は，左下図のような格子平面を描いて解きました．実は図示した段階ですべて解答が終了しています．

① A，Bの座標をとる．

② PとQの位置は計算することなく求められる．
(図を描かずに，単に公式に入れて計算すると，ABを比の順序を誤ってしまう可能性もある)

③ OPの垂直２等分線は，図の打点部分の長方形を９０度回転すると斜線部分の長方形になることから，簡単に描ける．同様に，PQの垂直二等分線も作図できるので，計算することなく２つの直線の方程式とその交点の座標がわかる．

④ 更に，図から半径が５の円であることがわかり，円の方程式が決定する．Rの座標は，中心から　３：４：５の直角三角形を描くことで求められる．

⑤ O，A，Rの座標からひと目で(3)の比がわかる．

分点の公式，垂直条件，連立方程式など，式の計算を経由しない，このような解法は邪道でしょうか．

しかし，私は，今回の問題を通して，問題解決とは，前提となる条件から，論理的に推論を積み重ね，結論にたどり着くだけではないことを指摘したいと思います．

図や表によりイメージ化すること，問題文の前後の文脈や，全体象を眺めることで，あちこちに転がっている手がかりを拾い集め解を手繰り寄せること，結論から逆に追いかけて，矛盾なく前提と結びつけること，など，特に，初見の問題への対処として必要かと思います．

見知らぬ道を歩くときも，目の前の足元の一歩を懐中電灯で照らしながら次の進路を決めるより，目指すべき灯台や周囲の状況が具体的にわかっていて歩く方が，意識も明確になるというものでしょう．

では，どうすれば，問題を読解し，俯瞰する力が育つのでしょうか．それは，「パターン問題を例示⇒類題で確認⇒演習問題」という活動を繰り返すだけでは身につかないと思います．「知るは好むに如かず，好むは楽しむに如かず」といいますが，考える楽しさを経験すること，ジタバタと試行錯誤し，思考の経緯や，理解に至った過程を人に説明すること，などから，逞しく問題に向きあう力が身につくのではないかと思います．

（すうがく通信 59 号より）

ヒューリスティックな考え方

前回は，問題文全体を俯瞰することで，解答への手がかりを手繰りよせるという話をしました．

今回も（悲しいことに）そんな話になりそうです．

第１問

［２］連立方程式

$$(※)\quad \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2^x+2^y+2^z=\dfrac{35}{2} \\ \dfrac{1}{2^x}+\dfrac{1}{2^y}+\dfrac{1}{2^z}=\dfrac{49}{16} \end{cases} \quad ■$$

を満たす実数 x, y, z を求めよう。ただし，$x \leqq y \leqq z$ とする．

$X=2^x, Y=2^y, Z=2^z$ とおくと，$x \leqq y \leqq z$ により，

$X \leqq Y \leqq Z$ である。（※）から，X, Y, Z の関係式

$$\begin{cases} XYZ=\boxed{ソ} \\ X+Y+Z=\dfrac{35}{2} \\ XY+YZ+ZX=\dfrac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツ}} \end{cases}$$

が得られる。この関係式を利用すると，t の３次式

$(t-X)(t-Y)(t-Z)$ は

$(t-X)(t-Y)(t-Z)$

$=t^3-(X+Y+Z)t^2+(XY+YZ+ZX)t-XYZ$

$=t^3-\dfrac{35}{2}t^2+\dfrac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツ}}t-\boxed{ソ}$

$=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\left(t-\boxed{テ}\right)\left(t-\boxed{トナ}\right)$ となる。

したがって，$X \leqq Y \leqq Z$ により

$X=\dfrac{1}{2}$，$Y=\boxed{テ}$，$Z=\boxed{トナ}$ となり，★

$x=\log_{\boxed{ニ}}X$，$y=\log_{\boxed{ニ}}Y$，$z=\log_{\boxed{ニ}}Z$

から $x=\boxed{ヌネ}$，$y=\boxed{ノ}$，$z=\boxed{ハ}$

であることがわかる。

３元の連立指数方程式を解く問題で，３次方程式の解と係数の関係を経由するという，高尚な誘導がついていますが，結論を見ると x, y, z の値が整数になっているので，問題文の■の式を満たす解は簡単に類推できます．

もっと言えば，★部分を見ると，なんと！$X=\frac{1}{2}$ と与えられているので，$x=-1$ がわかり，そこから■は，

$2^y+2^z=17=1+16=2^0+2^4$ とできて，$y=0$，$z=4$ がユニークに決定されます．

以下，$X=\frac{1}{2}, Y=1, Z=16$ となるので，この問題はすべてたちどころに解決してしまいます．

まるで，推理小説で，有能な探偵が状況証拠から論理を組み立てて犯人を特定しようとしている時に，犯人がいきなり自供してしまったようなものですね．

計算機科学などで使われる用語に，ヒューリスティックス（heuristic）といわれるものがあります．これは，演繹的に推論する方向でなく，少ない努力で解を求める方法，あるいは，経験や直観による発見的な思考法といった意味を持ちます．ここで述べた手法もいわばヒューリスティックスなものと言えるでしょう．

数学とは論理のステップを正しく追って，基本を積み上げていくことであるとすれば，このような解き方は思いっ切り邪道であるでしょう．

しかし，問題解決とは，第一原理から論理の連鎖によって導くことでは必ずしもありません．そのように捉えてしまうことは，むしろ数学の勉強をつまらないものにしているということもいえるのではないかと思います．

大学の解析学で ε-δ 論法という証明法を学びます．これは，結論の式を先に作って，そこから前提に結びつけていくように辻褄を合せる記述を行うことから，俗に「刑事コロンボ型証明法」と呼ばれます（最近の若い方は「刑事コロンボ」を知らない人が多いので，「古畑任三郎」とか「相棒」を例に出した方がいいかもしれませんが）．このような刑事ものドラマが人気なのは，状況証拠から理詰めで論理的に犯人を絞るのではなく，最初に視聴者に犯人を提示し（または主人公が類推し），状況証拠とすりあわせていくことに面白さがあるからではないかと思います．

京都大学名誉教授である森毅氏は「メタプロブレムがわかる生徒はプロブレムがわかる」ということを述べています．それは，問題の背景を知る，作題者の意図を考える，答えから出発して逆から考えてみるなど，問題を楽しむ気持ちが，問題を俯瞰する力を生みだすということなのでしょう．

今回の問題を生徒に解説する際には，指数対数と高次方程式の問題として扱うだけでなく，記述の構造にも着目させ，単元の内容の理解とともに，問題解決に向かう思考力もあわせて鍛えたいところです．

（すうがく通信 60 号より）