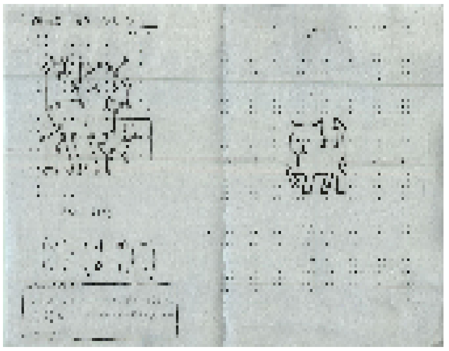
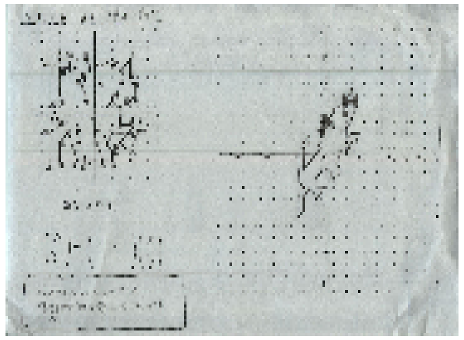
複数のアフィン変換とランダム系による集合のコンパクト性と ビデオカメラによるモデリング

青森県立八戸西高等学校　下町壽男

0　はじめに

一次変換が，平面上の点をどのように移動させているかを知るためには，１つの点の像と原像を見るだけではわからない．一次変換は，点ではなく，ある図形（有界閉集合）の内点の全体または一部を移動させると見えてくる．

このアイデアは小澤健一先生（東京•元東野高校校長）のあまりにも有名な「小澤ネコ」であり，多くの教師が実践している．

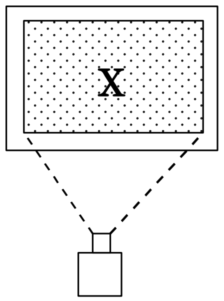
※　生徒のプリントより

一次変換の性質を知るにはもう一つ，点の軌道を調べるという方法もある．

つまり，力学系を考えて，点を繰り返し変換していくその様子を追いかける手法である．

今回は，この考え方を，ビデオカメラとプロジェクタによる像をモデルにして，いくつかの興味深い事例を示したい．

1　プロジェクタから投影された像



この像に含まれる点全体の集合 X を，R^2 の部分集合とみる．

このとき X は有界閉集合である．

2　縮小写像

X から X 内部への写像 f を考える．f を縮小写像とする．

参考　**縮小写像**

X 内の任意の２点 u, v に対し，実数への対応 $d(u, v)$ を考える．このとき

次の３つの条件を満たす時，X は距離空間であるという．

①　$d(u, v) \geqq 0$　$d(u, u) = 0$

②　$d(u, v) = d(v, u)$

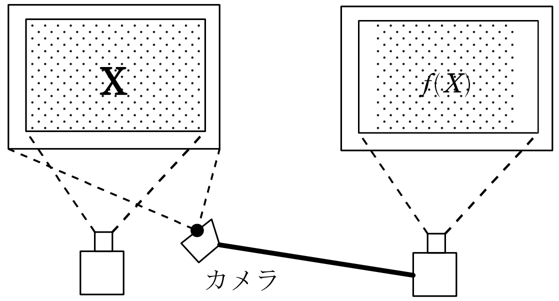
③　$d(u, v) + d(v, w) \geqq d(u, w)$　（三角不等式）

距離空間において，$d(f(u), f(v)) \leqq d(u, v)$ となるような f を縮小写像という．

すなわち　f が複素写像　$f(z) = \alpha z + \beta$　（$\alpha, \beta \in C$）であれば　$|\alpha| < 1$ である．

f が一次変換であれば，f を表す行列 A に対して $detA < 1$ である．

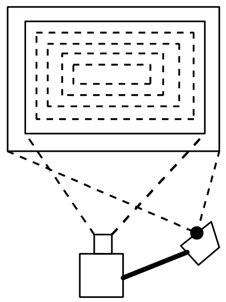
今，「スクリーンに映った像をカメラで撮影して別のスクリーンに映す」という操作は，X から X 内部への縮小写像である．



3　縮小写像の繰り返し

ビデオカメラで撮影した画像を，現在映し出しているプロジェクタで再生すると，縮小写像の繰り返しが得られる．ここで，スクリーン上の任意の点に（マグネットなどで）目印をつけると，f の繰り返しによって，その点がある一点に向かって収束していく様子（軌道）が確認できる．

つまり，任意の縮小写像は，領域内で不動点を持つことがイメージできる．



参考

X は距離空間で，f は縮小写像なので　$d(z_n, z_{n+1}) = k\,d(z_{n-1}, z_n)$　$(0<k<1)$

よって　$d(z_n, z_{n+1}) = k^n\,d(z_0, z_1)$

$n \leqq m$ に対して

$$d(z_n, z_m) \leqq d(z_n, z_{n+1}) + d(z_{n+1}, z_{n+2}) + \cdots + d(z_{m-1}, z_m)$$

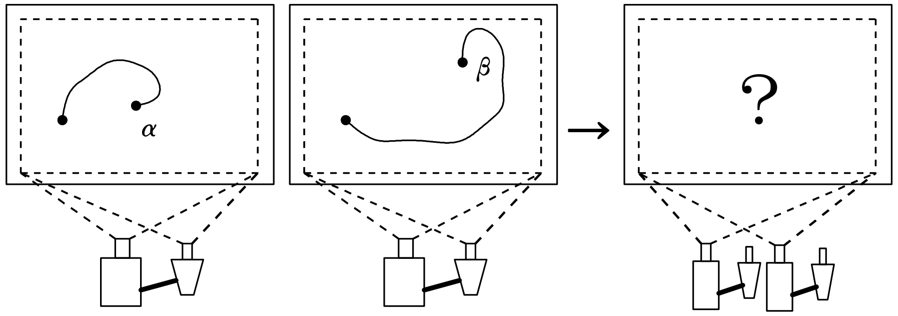
$$= k^n d(z_0, z_1) + k^{n+1} d(z_0, z_1) + k^{n+1} d(z_0, z_1) + \cdots + z^{m-1} d(z_0, z_1)$$

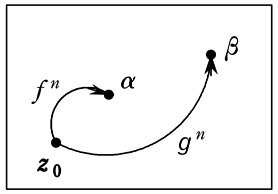
$$= (k^n + k^{n+1} + k^{n+2} + \cdots + k^{m-1})\,d(z_0, z_1) \leqq \frac{k^n}{1-k} d(z_0, z_1)$$

$z_0, z_1, z_2, \cdots$ はコーシー列である．z は収束し，X は有界閉なので，極限値は X の内部に存在．（X は完備な距離空間）

4　２つの縮小写像の合併による像

f, g は縮小写像で，それぞれX内の点に対して不動点 α, β を持っているとする．
ここで，g によるスクリーン画像と f によるスクリーン画像を重ね合わせてみる．





このとき，定点z_0はどのような軌道を描くであろうか．

予測①　z_0 はαに向かう軌道とβに向かう軌道を描く．

予測②　$z_0 \to \alpha$の軌道に対して，β に向かう吸引力が働く

予測③　$z_0 \to \beta$の軌道に対して，α に向かう吸引力が働く

結果としてある有界閉集合の内点を動き回る図形が生ずると考えられる．

5　コンピュータシミュレーション

2組のビデオ＋プロジェクタ＋スクリーンによる実験を行なう前に，コンピュータシミュレーションを行なってみる．

例として２つの複素縮小写像

$$\begin{cases} f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot z \\ g(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}-i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot z+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

を考える．

つまり，f は「$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍に縮小して，$\dfrac{\pi}{4}$ 回転」

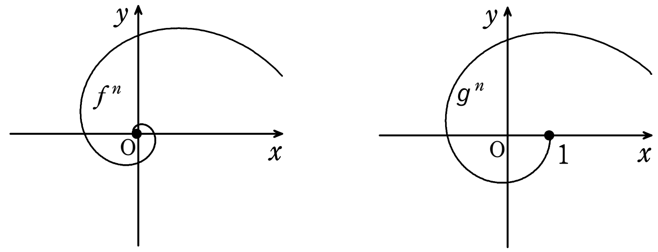
g は「$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍に縮小して，$-\dfrac{\pi}{4}$ 回転して，平行移動」というカメラ操作を表す．

この変換は，以下のように行列を用いて表すこともできる．

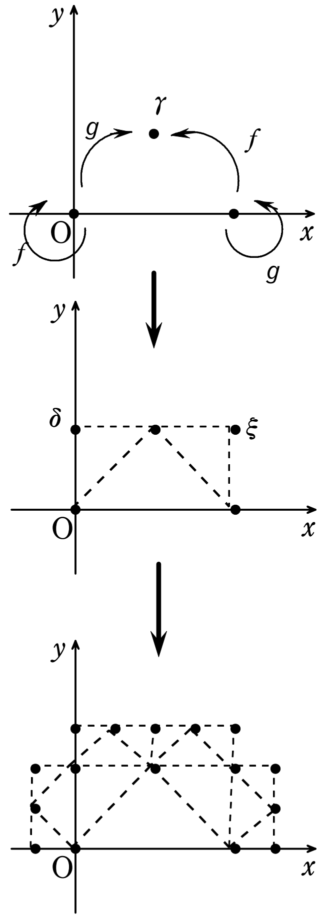
$$f:\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$g:\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

f による不動点（極限点）をα，g による不動点（極限点）をβとすると，
$\alpha=0, \beta=1$ となる．

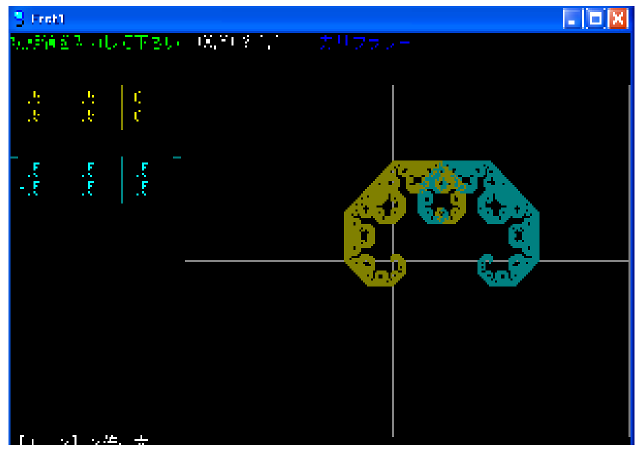


今，X 内の任意の点に対して，f, g のどちらかの写像をランダムに割り当てながら変換を繰り返す．この系による初期値の振る舞いを考えてみよう．



極限点αに g が施されると，γ の近傍に，
極限点βに f が施されると，γ の近傍に移る．

更にγ にf を施すとδに，γにg を施すとξの近傍に移る．
以下次々と繰り返していくと，移りうる内点の場所が増えていく．
変換をランダムに行なっていても，必ず α, β への軌道に入るので，左の各点は集積点になる．
パソコンで実行すると，下図のような自己相似図形が生じる．



では　ビデオカメラとプロジェクタ2台使って，未知との遭遇を楽しもう
（以下実験）