

第 37 回 AMI 東北大会 (福島大会)

「つながる」三角形の 5 心

～内心・外心・重心・垂心・傍心の距離～

盛岡三高 下町壽男

儒教の教えに五常の徳というものがある。

仁：人を思いやる心

義：利欲にとらわれない心

礼：礼儀正しく謙虚な心

智：知識を重んじる心

信：友情に厚く誠実な心

この 5 つの心を磨くことで人格は陶冶される。

しかし、重要なのは、これらの 5 つは個々独立した概念ではなく、互いに関連しあっていることだ。キーワードは「つながり」である。5 つの心がどう「つながり」を持っているか我々は考えていかなければならない。

三角形に 5 心というものがある。

内心：角の二等分線の交点 内接円の中心

外心：垂直二等分線の交点 外接円の中心

重心：中線の交点

垂心：頂点から対辺に下した垂線の交点

傍心：1 内角 2 外角の 2 等分線の交点 3 個ある

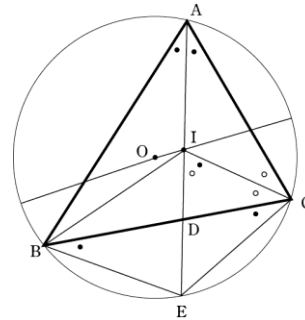
この 5 つの心を学ぶことで三角形の理解は深まる。しかし、重要なのは、これらの 5 つは個々独立した概念ではなく、互いに関連しあっていることだ。キーワードは「つながり」である。5 つの心がどう「つながり」を持っているか我々は考えていかなければならない。

そこで、今回は、三角形の 5 つの心の距離関係を調べてみよう。

	内心	外心	重心	垂心	傍心
内心		①	▲	▲	⑥
外心			④	③	②
重心				⑤	▲
垂心					▲
傍心					

全部で 10 通りの距離が考えられるが、下表①～⑥について考えてみたい。残りは、読者（参加者）の宿題としたい。

① 内心と外心の距離



図において、O を  $\triangle ABC$  の外心、I を内心、外接円の半径を  $R$ 、内接円の半径を  $r$ 、内心と外心の距離  $OI$  を、 $OI = d$  とおく

(i) 方べきの定理

方べきの定理から  $(R+d)(R-d) = IA \times IE$  なので、 $IA \times IE$  を求めれば  $d$  がわかる。

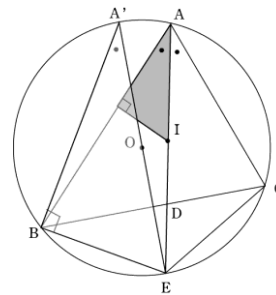
(ii)  $IE = BE$  を示す

図において、円周角一定の定理から

$\angle EBC = \angle ECB = \bullet$  なので、 $BE = CE$

また、 $\angle EIC = \angle ECI = \bullet \circ$  なので  $CE = IE$

$BE = IE = CE$  がいえた。つまり、 $IA \times IE$  のかわりに、 $IA \times BE$  を考えればよい。



(iii) 三角比を考えて

図において、 $\sin \bullet$  を 2 通り考えて

$$\sin \bullet = \frac{r}{AI} = \frac{BE}{2R}$$

この式から、 $IA \times BE = 2rR$

(iv) 元の式に代入して

$$(R+d)(R-d) = 2rR \quad ※$$

これを整理すると

$$d = \sqrt{R(R-2r)} \quad \text{求めた!}$$

(v) 補足すること

■  $AB=c, BC=a, CA=b$ ,  $\triangle ABC$  の面積を  $S$  とすると次のことがいえる.

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}bc \times \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R} \quad \text{㊦}$$

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c) \quad \text{㊧}$$

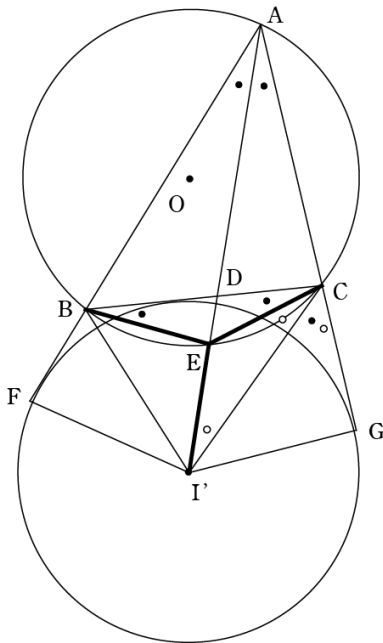
$$\text{下町より, } 2rR = \frac{abc}{a+b+c}$$

$$※\text{より } (R+d)(R-d) = \frac{abc}{a+b+c}$$

美しいなあ.

■  $d = \sqrt{R(R-2r)}$  において, ルートの中は 0 以上なので,  $R \geq 2r$   
つまり, 「外接円の半径は, 内接円の半径の 2 倍以上である」ことがいえた.

### ① 傍心と外心の距離



図において,  $O$  を  $\triangle ABC$  の外心,  $I'$  を傍心, 外接円の半径を  $R$ , 傍接円の半径を  $r'$ , 傍心と外心の距離  $OI'$  を,  $OI' = d$  とおく.

(i)  $BE = CE = I'E$  を示す

図において, 円周角一定の定理から,

$\angle BCE = \angle CBE$  なので,  $BE = CE$

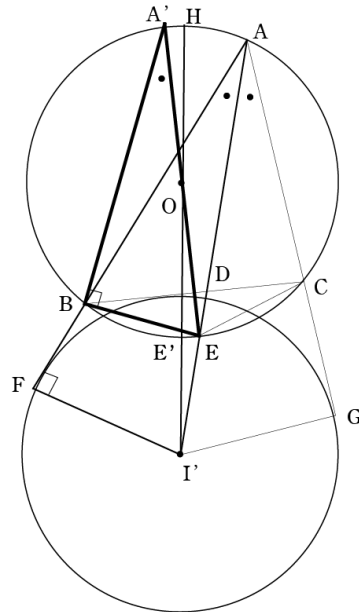
$CI'$  は  $\triangle ABC$  の  $\angle C$  の外角の二等分線なので,

$\angle ECI' = \bullet$  とすると,  $\angle I'CG = \bullet + \bullet$

ところが,  $\angle I'CG$  は  $\triangle A'IC$  の外角なので,

$\angle A'IC = \bullet$  よって,  $CE = I'E$

(ii) 方べきの定理



図において, 方べきの定理と (i) より

$$I'E \times I'H = I'E \times I'A = BE \times I'A$$

$$\text{よって } (d-R)(d+R) = BE \times AI'$$

(iii) 三角比を考えて

図において,  $\sin \bullet$  を 2 通り考えて

$$\sin \bullet = \frac{r'}{AI'} = \frac{BE}{2R}$$

$$\text{この式から, } IA \times BE = 2r'R$$

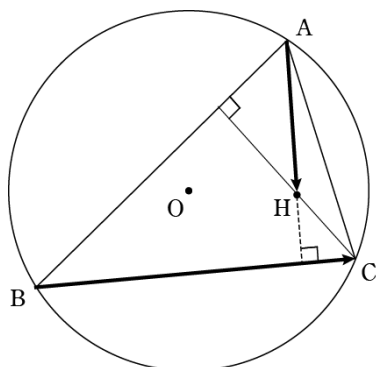
(iv) 元の式に代入して

$$(d-R)(d+R) = 2r'R$$

これを整理すると

$$d = \sqrt{R(R+2r')} \quad \text{求めた!}$$

### ③ 外心と垂心の距離



これはベクトルで考えてしまおう。

#### (i) 垂心の位置ベクトル

$\triangle ABC$ の外接円の半径を $R$ とおく。

$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ となる $H$ を考えると、

$\vec{AH} = \vec{OB} + \vec{OC}$ なので

$$\begin{aligned} \vec{AH} \cdot \vec{BC} &= (\vec{OB} + \vec{OC}) \cdot (\vec{OC} - \vec{OB}) \\ &= |\vec{OC}|^2 - |\vec{OB}|^2 = R^2 - R^2 = 0 \end{aligned}$$

よって、 $AH \perp BC$

同様に考えて、 $BH \perp AC$ ,  $CH \perp AB$

つまり、 $H$ は垂心であることがわかった。

#### (ii) 内積を求めておく

$AB=c$ ,  $BC=a$ ,  $CA=b$ とおくと、

$$\begin{aligned} |\vec{AB}|^2 &= |\vec{OB} - \vec{OA}|^2 \\ |\vec{AB}|^2 &= |\vec{OB}|^2 + |\vec{OA}|^2 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} \quad \text{より} \end{aligned}$$

$$2\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 2R^2 - c^2$$

同様に考えて

$$2\vec{OB} \cdot \vec{OC} = 2R^2 - a^2$$

$$2\vec{OC} \cdot \vec{OA} = 2R^2 - b^2$$

#### (iii) 大きさを求める

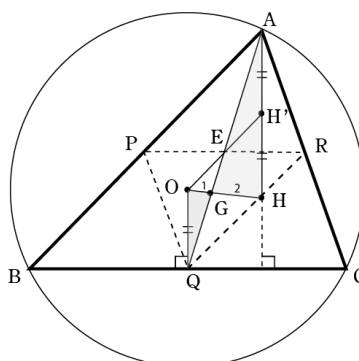
$$\begin{aligned} |\vec{OH}|^2 &= |\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}|^2 \\ &= 3R^2 + 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + 2\vec{OB} \cdot \vec{OC} + 2\vec{OC} \cdot \vec{OA} \\ &= 3R^2 + 6R^2 - a^2 - b^2 - c^2 \end{aligned}$$

$$\text{よって } OH = \sqrt{9R^2 - a^2 - b^2 - c^2}$$

残念ながら、あまりきれいな形にならなかった。

### ④ 外心と重心の距離

### ⑤ 垂心と重心の距離



(i) 外心と重心と垂心は一直線上にある。

この3点がつている直線はオイラー線と呼ばれる。ではまず、そのことを証明しておこう。

図において、 $O$ を $\triangle ABC$ の外心、 $H$ を垂心、 $G$ を $OH$ と $AQ$ の交点、また、 $AB, BC, CA$ の中点をそれぞれ $P, Q, R$ とする。

$\triangle APQ$ は $\triangle ABC$ を $A$ を中心に $1/2$ 倍に縮小したものであるから、 $\triangle APR$ の垂心を $H'$ とすると、

$$AH' = \frac{1}{2} AH$$

$\square APQR$ は平行四辺形で、 $PR$ と $AQ$ はその対角線、 $E$ はその交点なので $AE = QE$  ㊦

また、 $OQ$ は $BC$ の垂直二等分線なので $OQ \perp BC$ 。  
 $AH' \perp BC$ でもあるので、 $OQ \parallel AH'$  ㊦'

下町より、 $\triangle OQE \cong \triangle H'AE$ となるので、 $AH' = OQ$

また、 $\triangle OQG \cong \triangle HAG$ であるから、 $AH = 2OQ$ よって、 $QG : GA = 1 : 2$ となるので、 $G$ は $\triangle ABC$ の重心であることがわかった。

このことから、 $O, G, H$ は一直線上にあり、

$OG : GH = 1 : 2$ となる。(終)

(ii) 外心と重心、垂心と重心の距離

(i)の結果から距離が求められる。

$$OG = \frac{1}{3} OH = \frac{1}{3} \sqrt{9R^2 - a^2 - b^2 - c^2}$$

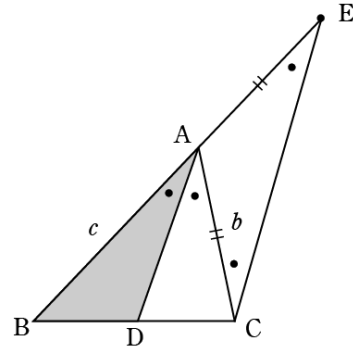
$$GH = \frac{2}{3} OH = \frac{2}{3} \sqrt{9R^2 - a^2 - b^2 - c^2}$$

(iii) 補足すること

図において、QH'を直径とする円は、ACの中点と、AからBCに下した垂線の足の4点を通っていることがわかる。また、PH'⊥AC、AC∥PQから、∠QPH'=90°となるので、この円は、ABの中点Pも通る。

つまり、QH'を直径とする円は、△ABCの各辺の中点P、Q、RとAHの中点、AからBCに下した中点の足を通ることがわかる。

このことをBやCでも考えていくと、P、Q、Rを通る円は、更に各頂点から対辺に下した垂線の足と、垂心と各頂点を結んだ線分の midpoint の合計9個の点を通ることがわかる。この円を9点円という。9点円の中心は、図より、OHとQH'の交点、すなわち、OHの中点であることがわかる。



Cを通り、ADに平行な直線をひき、それがBAの延長と交わる点をEとすると、△ACEは二等辺三角形となるので、AC=AE。

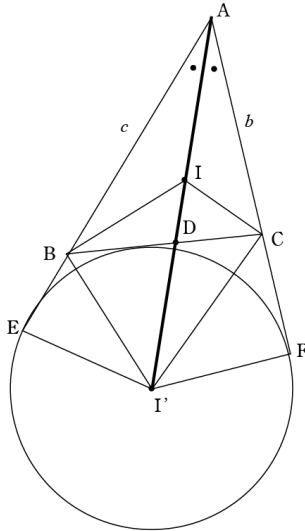
また、△ABD∽△EBCなので、BA:AE=BD:DCすなわち、AB:AC=BD:DCがいえた。

このことから、BIが∠Bの二等分線するとき、

$$AI:ID=AB:BD=c:\frac{ac}{b+c}=(b+c):a$$

となる。

### ⑤ 内心と傍心の距離



△ABCにおいてAB=c, BC=a, CA=b,

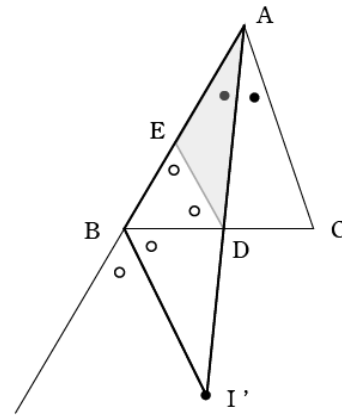
内心をI, 傍心(の1つ)をI'とおく。

まず、いくつか準備をしよう。

(i) 角の二等分線に関する定理

△ABCにおいて、ADが∠Aの二等分線するとき、BD:DC=c:bとなる。このことから、BD, DCの長さはそれぞれ、

$$BD=\frac{ac}{b+c}, DC=\frac{ab}{b+c}$$



外分の場合は、上図のように、Dを通りI'Bに平行な直線とABの交点をEとすると、△BDEが二等辺三角形となるのでBE=BD。

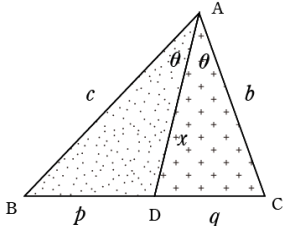
また、△ADE∽△A'I'Bなので、

$$AI':I'D=AB:BE=AB:BD=(b+c):a$$

以上より、内心Iと傍心I'は線分ADを(b+c):aの比にそれぞれ内分及び外分する点であることがわかる。

このとき、線分の長さAI, AD, AI'は調和数列をなす。このような4点を調和点列という。

(ii) 角の二等分線 AD の長さ



図において、 $x = \sqrt{bc - pq}$  となる.

余弦定理を用いる証明が一般的だが、ここでは面積の考えから示す.

$\triangle ABC + \triangle ADC = \triangle ABC$  から

$$\frac{1}{2}cx \sin \theta + \frac{1}{2}bx \sin \theta = \frac{1}{2}bc \sin 2\theta$$

$$x = \frac{2bc}{b+c} \cos \theta$$

$$= \frac{2bc}{b+c} \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}$$

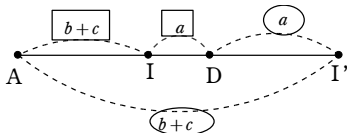
$$= \frac{2bc}{b+c} \sqrt{1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$$

$$= \sqrt{bc} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2}$$

$$= \sqrt{bc - \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{ab}{b+c}}$$

$$= \sqrt{bc - pq}$$

(iii) 内心と傍心の距離



上の関係から

$$AI = \frac{b+c}{a+b+c} AD, \quad AI' = \frac{b+c}{b+c-a} AD$$

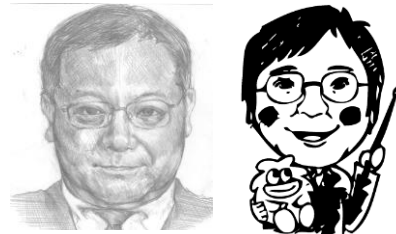
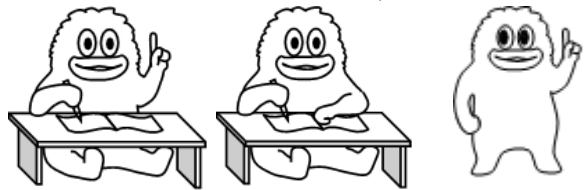
よって

$$II' = \left( \frac{b+c}{b+c-a} - \frac{b+c}{a+b+c} \right) AD$$

$$= \frac{2a(b+c)}{(a+b+c)(b+c-a)} \sqrt{bc - \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{ab}{b+c}}$$

$$= \frac{2a\sqrt{bc}}{(a+b+c)(b+c-a)} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)}$$

$$= \frac{2a\sqrt{bc}}{\sqrt{a+b+c} \sqrt{b+c-a}}$$



<http://simomath.blog.fc2.com/>

(あなたと夜と数学と)