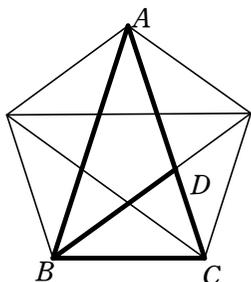


1 正5角形の作図

(1) $\cos 72^\circ$ の値

① 三角形の相似



$\triangle ABC$ と $\triangle BCD$ において、両者は底角が 72° の二等辺三角形、 $\triangle ABD$ も二等辺三角形なので、 $BC=1$ とすると $BD=AD=1$

ここで $AB=x$ とすると相似比から

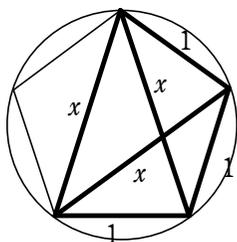
$$x : 1 = 1 : (x-1)$$

よって $x^2 - x - 1 = 0$ $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$$\cos 72^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

② トレミーの定理

正5角形は円に内接するので、辺と対角線の比はトレミーの定理を用いると簡単に得られる。



図においてトレミーの定理を用いると

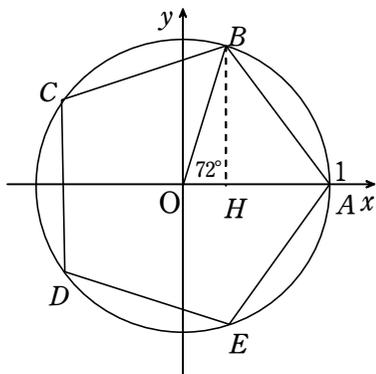
$$x \times 1 + 1 \times 1 = x \times x$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\cos 72^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

③ 複素数の利用

正5角形の頂点 A, B, C, D, E に対応する複素数を $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ とする。



図において、 B と E 及び C と D はそれぞれ x 軸に関して対称なので

$$\overline{z} = z^4, \overline{z^2} = z^3 \text{ がいえる。}$$

$\theta = 72^\circ$ とおくと

$$z = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$z^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$$

$$z^3 = \cos 2\theta - i \sin 2\theta$$

$$z^4 = \cos \theta - i \sin \theta$$

$z^5 = 1$ より $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ なので

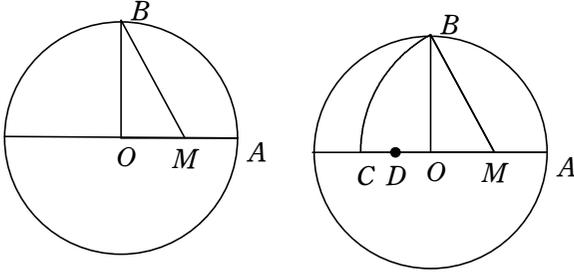
$$(z + z^4) + (z^2 + z^3) = -1$$

$$2\cos \theta + 2\cos 2\theta = -1$$

$$4\cos^2 \theta + 2\cos \theta - 1 = 0 \quad \text{よって } \cos \theta = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

(2) $\cos 72^\circ$ の作図

① 三平方の定理



手順1 半径1の円と、 OA, OB ($\angle AOB=90^\circ$) を描く

手順2 OA の中点 M をとる このとき $OM = \frac{1}{2}$ なので

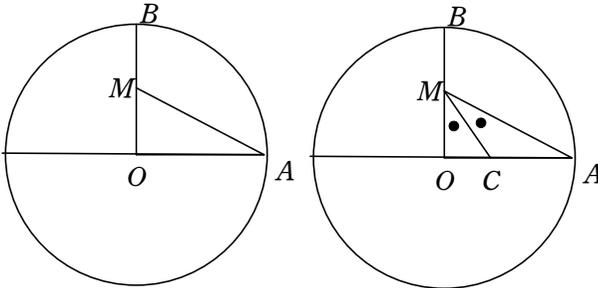
$$BM = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

手順3 M を中心として半径 MB の円を描き、直線 OA との交点を C とする

$$\text{このとき } OC = MC - OM = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

手順4 OC の中点 D をとる。このとき $OD = \frac{1}{2}OC = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ ($\cos 72^\circ$)

② 角の二等分線



手順1 ①と同じ

手順2 OB の中点 M をとる このとき $OM = \frac{1}{2}$, $AM = \frac{\sqrt{5}}{2}$

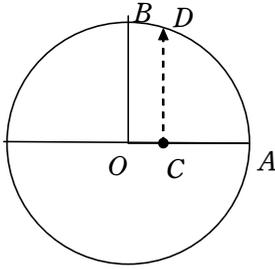
手順3 $\angle OMA$ の二等分線を引き、 OA との交点を C とする。

このとき、 $OM : AM = OC : CA$ がいえるので

$$OC = OA \times \frac{OM}{OM + AM} = \frac{1}{1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \quad (\cos 72^\circ)$$

(3) 半径 1 の円に内接する正 5 角形の作図

① $\cos 72^\circ$ の利用

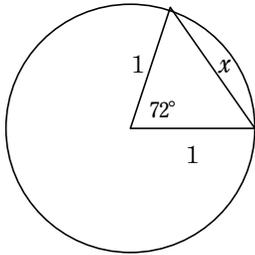


手順 1 (2)の方法で $OC = \cos 72^\circ$ となる C をとる

手順 2 OA に垂直な線を引き、円との交点を D とする。

このとき AD が 1 辺となる。

② 余弦定理の利用



$\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ を利用して、正 5 角形の 1 辺の長さ

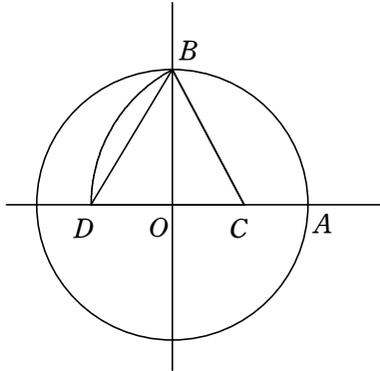
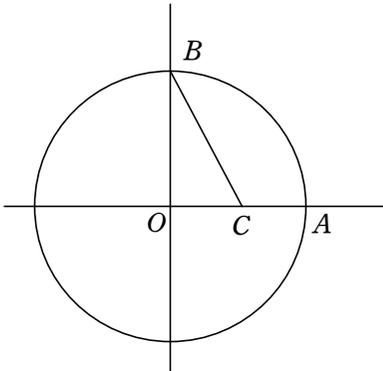
x を求める。

余弦定理より

$$x^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cos 72^\circ = 2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{よって } x = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$$

この値は次の手順で作図できる。



手順 1 OA の中点 C をとる

手順 2 C を中心として半径 CB の円を描き、直線 OA との交点を D とする

$$\text{このとき } OC = \frac{1}{2}, CB = CD = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{よって } OD = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

ここで BD の長さを考えると

$$BD = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$$

BD は正 5 角形の 1 辺の長さを表していることがわかった。この作図が早い。

(4) $x^5=1$ の解

(1)の③でわかるように、 $x^n-1=0$ の n 個の解は $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{n-1}\}$ とおける。

このとき α の実部が、正 n 角形の中心角の余弦を表すので、 $x^n=1$ が根号(ルート)のみで解けると、つまり2次方程式の繰り返しによって解けるときに正 n 角形は作図可能となる。

① 相反方程式

$$x^5=1 \text{ より } (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$$

ここで $\alpha = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ を求める。

$\alpha \neq 1$ なので $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ 明らかに $\alpha \neq 0$ なので、両辺を α^2 で割って

$$\alpha^2 + \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = 0 \quad \text{整理して} \quad \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) - 1 = 0$$

$$t = \alpha + \frac{1}{\alpha} \text{ とおくと、} t^2 + t - 1 = 0 \quad \text{よって} t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \alpha + \bar{\alpha} = \operatorname{Re}(\alpha) = 2\cos \frac{2\pi}{5} > 0 \text{ なので } t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

よって α は、2次方程式 $\alpha^2 - t\alpha + 1 = 0$ の解である。

$$\alpha = \frac{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \pm \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} - 4}}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \pm \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} i$$

$$\operatorname{Re}(\alpha) > 0 \text{ なので } \alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} + \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} i$$

② 解と係数の関係

$$\beta = \alpha + \alpha^4, \gamma = \alpha^2 + \alpha^3 \text{ とおくと、}$$

$$\beta + \gamma = \alpha + \alpha^4 + \alpha^2 + \alpha^3 = -1$$

$$\beta\gamma = \alpha^3(1 + \alpha^3)(1 + \alpha) = \alpha^3(1 + \alpha + \alpha^3 + \alpha^4) = -\alpha^5 = -1$$

解と係数の関係から β, γ は2次方程式

$$t^2 + t - 1 = 0 \text{ の解である。すなわち } t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\beta > 0, \gamma < 0 \text{ なので、} \beta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

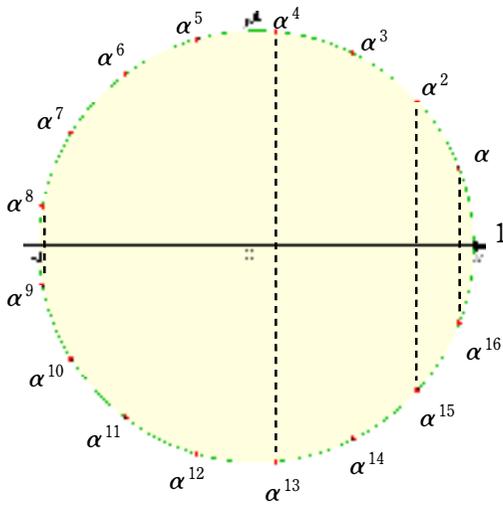
$$\beta = \alpha + \alpha^4 \text{ より } \alpha + \frac{1}{\alpha} = \beta \text{ よって、} \alpha^2 - \beta\alpha + 1 = 0$$

$$\alpha = \frac{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \pm \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} - 4}}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \pm \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} i$$

①と②は本質的に同じであるが、正17角形の作図では②の手法で考えるのであえてとりあげてみた。

2 正17角形の作図

(1) $x^{17}=1$ を解く方針



$x^{17}=1$ の17個の解を

$\{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{16}\}$ とおくと、
図のように、1を除いた16個の解は、
 x 軸に関して対称に配置されている。
つまり、8組の共役な複素数になっている。

方程式の解法の方針は、1-(4)②で行った解と係数の関係を用いる。
すなわち、まず1を除いた16個の解を8
個ずつの2組の解の和にして、
それらの値を解と係数の関係により求
める。

次に、その8個を4個ずつの和にしてそれらの値を求め、更にその4個を2個ずつの和にしてその値を求める、というように解と係数の関係を順次繰り返すことにより、2次方程式を4回用いて解を求める。

2次方程式の解（の実部と虚部）は定規とコンパスで作図可能なので、上のような手法で解が求まった場合、正17角形は作図可能となることがいえる。

この手法で考えると、解の個数が次々半減し最後に2個になるので、 $x^n=1$ が根号のみで求められるためには、 $n-1=2^k$ すなわち、 $n=2^k+1$ の形で書かれていなければならない。

では、最初に解の集合 $\{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{16}\}$ から1を除いた16個を8個ずつに分けよう。2つの組を β_1, β_2 とする。 $1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{16} = 0$ なので、どのように8つずつに分けても $\beta_1 + \beta_2 = -1$ となるのであるが、 β_1, β_2 とも実数でなければ、次の2次方程式が実係数方程式にならない。従って、16個の解を4組の共役のペアに分けると β_1, β_2 がともに実数となり次の2次方程式へとつなげることができる。

今、 β_1, β_2 を、図のように4組の共役のペアに分ける。

$$\beta_1 = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^8 + \alpha^{16} + \alpha^{15} + \alpha^{13} + \alpha^9$$

$$\beta_2 = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6 + \alpha^7 + \alpha^{10} + \alpha^{11} + \alpha^{12} + \alpha^{14}$$

ちなみに、 $\bar{\alpha} = \alpha^{16}$ なので、 $\bar{\alpha}^2 = \alpha^{32} = \alpha^{15}$, $\bar{\alpha}^4 = \alpha^{30} = \alpha^{13}$, $\bar{\alpha}^8 = \alpha^{26} = \alpha^9$

となるので、 β_1 の各項は $\{\alpha^{2^n} \mid n=0, 1, 2, 3, \dots, 7\}$ と表せる。

また、図から $\beta_1 > 0, \beta_2 < 0$ となることがわかる。

ではまず最初の2次方程式を解いてみよう。

(2) 最初の2次方程式

$$\beta_1 = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^8 + \alpha^{16} + \alpha^{15} + \alpha^{13} + \alpha^9$$

$$\beta_2 = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6 + \alpha^7 + \alpha^{10} + \alpha^{11} + \alpha^{12} + \alpha^{14} \quad (\beta_1 > 0, \beta_2 < 0)$$

とおく。 $\beta_1 + \beta_2 = \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{16} = -1$

$\beta_1\beta_2$ の計算は面倒であるが、以下のような17を法とする指数の和の乗積表を作ればわかりやすい。

	1	2	4	8	9	13	15	16
3	4	5	7	11	12	16	1	2
5	6	7	9	13	14	1	3	4
6	7	8	10	14	15	2	4	5
7	8	9	11	15	16	3	5	6
10	11	12	14	1	2	6	8	9
11	12	13	15	2	3	7	9	10
12	13	14	16	3	4	8	10	11
14	15	16	1	5	6	10	12	13

上の結果より $\beta_1\beta_2 = 4(\alpha + \alpha^2 + \alpha^2 + \dots + \alpha^{16}) = -4$

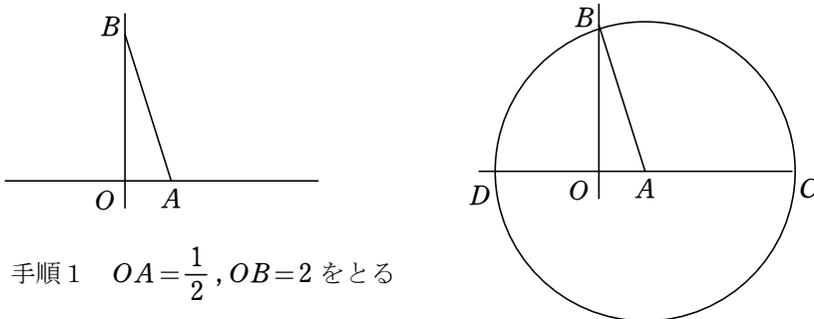
よって、 β_1, β_2 は2次方程式 $t^2 + t - 4 = 0$ の2つの解である。

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$\beta_1 > 0, \beta_2 < 0$ より

$$\beta_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \quad \beta_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

β_1 と $-\beta_2$ の長さは次のように作図できる。



手順1 $OA = \frac{1}{2}, OB = 2$ をとる

手順2 A を中心として半径 AB の円を描く

$$\text{このとき } AB = \sqrt{\frac{1}{4} + 4} = \frac{\sqrt{17}}{2} \quad OC = OA + AC = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} = -\beta_2$$

$$OD = AD - OA = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} = \beta_1$$

(2) 2番目の2次方程式

$\beta_1 = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^8 + \alpha^{16} + \alpha^{15} + \alpha^{13} + \alpha^9$ の8つの項について

$r_1 = \alpha + \alpha^{16} + \alpha^4 + \alpha^{13}$, $r_2 = \alpha^2 + \alpha^{15} + \alpha^8 + \alpha^9$ と2組の共役のペアに分ける。

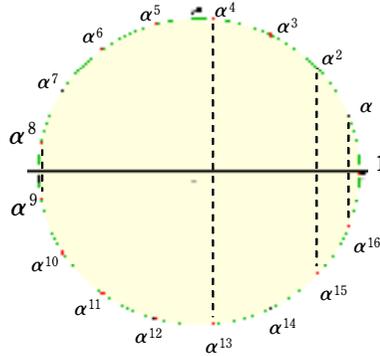
このとき

$$r_1 + r_2 = \beta_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$r_1 r_2 = (\alpha + \alpha^{16} + \alpha^4 + \alpha^{13})(\alpha^2 + \alpha^{15} + \alpha^8 + \alpha^9) = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^{16} = -1$$

参考

+	1	16	4	13
2	3	1	6	15
15	16	14	2	11
8	9	7	12	4
9	10	8	13	5



よって、 r_1, r_2 は2次方程式 $t^2 - \beta_1 t - 1 = 0 \dots \ast$ の解である。

また、図から $r_1 = (\alpha + \bar{\alpha}) + (\alpha^4 + \bar{\alpha}^4) > 0$

$r_1 r_2 = -1 < 0$ から $r_2 < 0$ がいえる。

$$\ast \text{を解くと } t = \frac{\beta_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 + 4}}{2} \text{ すなわち } r_1 = \frac{\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 + 4}}{2}, r_2 = \frac{\beta_1 - \sqrt{\beta_1^2 + 4}}{2}$$

$$\text{ここで、} \sqrt{\beta_1^2 + 4} = \sqrt{\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right)^2 + 4} = \sqrt{\frac{34 - 2\sqrt{17}}{4}} = \frac{\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{2}$$

となるので

$$r_1 = \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}, r_2 = \frac{-1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} \text{ を得る。}$$

$\beta_2 = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6 + \alpha^7 + \alpha^{10} + \alpha^{11} + \alpha^{12} + \alpha^{14}$ についても同様に考える。

$r_3 = \alpha^3 + \alpha^{14} + \alpha^5 + \alpha^{12}$, $r_4 = \alpha^6 + \alpha^{11} + \alpha^7 + \alpha^{10}$ と分けると

$r_3 + r_4 = \beta_2$, $r_3 r_4 = -1$ がわかるので、

r_3, r_4 は2次方程式 $t^2 - \beta_2 t - 1 = 0$ の解である。

また、「 α^3 の実部 $>$ α^5 の実部」が明らかなので、 $r_3 > 0, r_4 < 0$ がいえる。

$$\text{よって、} r_3 = \frac{\beta_2 + \sqrt{\beta_2^2 + 4}}{2}, r_4 = \frac{\beta_2 - \sqrt{\beta_2^2 + 4}}{2}$$

$$\text{ここで、} \sqrt{\beta_2^2 + 4} = \sqrt{\left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}\right)^2 + 4} = \sqrt{\frac{34 + 2\sqrt{17}}{4}} = \frac{\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{2}$$

となり、

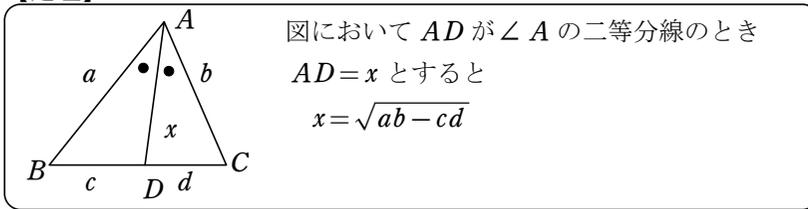
$$r_3 = \frac{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4}, r_4 = \frac{-1 - \sqrt{17} - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4} \text{ を得る。}$$

(3) r_1 の作図 その1

$r_1 = \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}$ の作図、とりわけ $\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$ の作図について考え

てみよう。まず、次の定理を準備する

【定理】



【証明】 AD は $\angle A$ の二等分線なので $a : b = c : d$ よって $ad = bc \dots \ast$

余弦定理より

$$\cos \frac{A}{2} = \frac{a^2 + x^2 - c^2}{2ax} = \frac{b^2 + x^2 - d^2}{2bx}$$

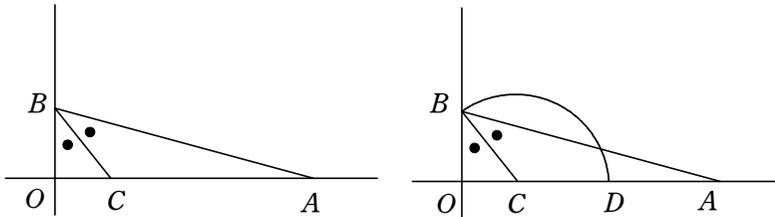
整頓して $a^2b + bx^2 - bc^2 = ab^2 + ax^2 - ad^2$

$$(b-a)x^2 = ab^2 - a^2b - ad^2 + bc^2$$

ここで、 \ast より $ad^2 = bcd, bc^2 = acd$ なので

$$(b-a)x^2 = ab(b-a) - cd(b-a) \therefore x^2 = ab - cd \quad x = \sqrt{ab - cd} \quad \text{終}$$

これを利用して次のような手順で求める。



手順1 $OA = 4, OB = 1$ をとる。このとき $AB = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$

手順2 $\angle B$ の二等分線を引き、 OA との交点を C とする。

このとき、 $OC : CA = OB : AB = 1 : \sqrt{17}$ より

$$OC = \frac{4}{1 + \sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17} - 1}{4} \quad CA = 4 - \frac{\sqrt{17} - 1}{4} = \frac{17 - \sqrt{17}}{4}$$

ここで上で述べた定理を用いると

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{1 \cdot \sqrt{17} - \frac{\sqrt{17} - 1}{4} \cdot \frac{17 - \sqrt{17}}{4}} = \sqrt{\frac{16\sqrt{17} - 18\sqrt{17} + 34}{16}} \\ &= \frac{\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} \end{aligned}$$

手順3 C を中心として半径 CB の円を描き、 OA との交点を D とする。

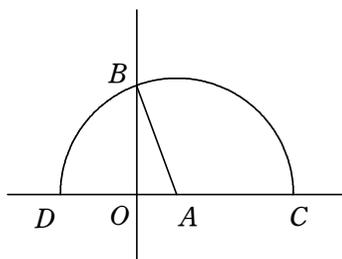
$$\text{このとき、} OD = OC + CD = \frac{\sqrt{17} - 1}{4} + \frac{\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} = r_1$$

(4) r_1 の作図 その2

$$1 + \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{4}\right)^2 = \frac{34 - 2\sqrt{17}}{16}$$

$$1 + \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{4}\right)^2 = \frac{34 + 2\sqrt{17}}{16}$$

に着目すると次のように簡単に r_1 を作図することができる。



手順1 $OB=1, OA=\frac{1}{4}$ をとる

$$\text{このとき } AB = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

手順2 A を中心に半径 AB の円を描く

$$OC = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$$

$$OD = \frac{\sqrt{17} - 1}{4} \text{ となる}$$

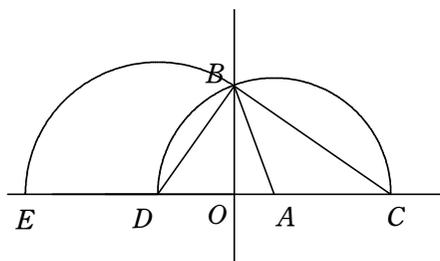
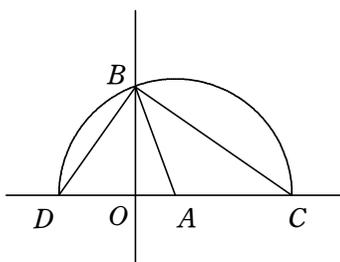
このとき

$$BC^2 = 1 + \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{4}\right)^2 = \frac{34 + 2\sqrt{17}}{16}$$

$$BC = \frac{\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4}$$

$$\text{また、} BD^2 = 1 + \left(\frac{\sqrt{17} - 1}{4}\right)^2 = \frac{34 - 2\sqrt{17}}{16}$$

$$BD = \frac{\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}$$



手順3 D を中心として半径 BD の円を描く

$$\text{このとき } OE = OD + DE = \frac{\sqrt{17} - 1}{4} + \frac{\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} = r_1$$

(5) 3番目の2次方程式

$r_1 = \alpha + \alpha^{16} + \alpha^4 + \alpha^{13}$, $r_2 = \alpha^2 + \alpha^{15} + \alpha^8 + \alpha^9$ について(2)と同様に行う。

まず $r_1 = \alpha + \alpha^{16} + \alpha^4 + \alpha^{13}$ において $\delta_1 = \alpha + \alpha^{16}$, $\delta_2 = \alpha^4 + \alpha^{13}$ と分ける。

$$\text{このとき } \delta_1 + \delta_2 = r_1 = \frac{\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}$$

$$\delta_1 \delta_2 = (\alpha + \alpha^{16})(\alpha^4 + \alpha^{13}) = \alpha^5 + \alpha^{14} + \alpha^3 + \alpha^{12} = r_3 = \frac{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4}$$

よって、 δ_1, δ_2 は2次方程式 $t^2 - r_1 t + r_3 = 0 \dots \ast$ の解である。

(2)の円分の図からわかるように、 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ $\delta_1 > \delta_2$ である。

$$\ast \text{を解くと } t = \frac{r_1 \pm \sqrt{r_1^2 - 4r_3}}{2} \quad \therefore \delta_1 = \frac{r_1 + \sqrt{r_1^2 - 4r_3}}{2}, \delta_2 = \frac{r_1 - \sqrt{r_1^2 - 4r_3}}{2}$$

では頑張って δ_1 を求めてみよう。

$$\begin{aligned} r_1^2 - 4r_3 &= \left(\frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} \right)^2 - 4 \frac{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4} \\ &= \frac{52 - 4\sqrt{17} + 2\sqrt{17}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{16} + 1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \\ &= \frac{68 + 12\sqrt{17} + 2(\sqrt{17} - 1)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{16} \end{aligned}$$

ここで $2(\sqrt{17} - 1)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$ を次のように変形する

$$\begin{aligned} 2(\sqrt{17} - 1)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} &= 2(\sqrt{17} + 1)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ &= 2\sqrt{(\sqrt{17} + 1)^2(34 - 2\sqrt{17})} - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ &= 2\sqrt{(18 + 2\sqrt{17})(34 - 2\sqrt{17})} - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ &= 4\sqrt{(9 + \sqrt{17})(17 - \sqrt{17})} - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ &= 4\sqrt{136 + 8\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} = 8\sqrt{34 + 2\sqrt{7}} - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \end{aligned}$$

$$\text{よって } r_1^2 - 4r_3 = \frac{68 + 12\sqrt{17} - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 8\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{16}$$

$$\begin{aligned} \therefore \delta_1 &= \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{8} + \frac{2\sqrt{17 + 3\sqrt{17}} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{8} \\ &= \frac{1}{8}(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17}} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}) \end{aligned}$$

(6) 最後の2次方程式そして $\cos \frac{2\pi}{17}$ の値

(5)で δ_1 が求まったので、 $\delta_1 = \alpha + \alpha^{16}$ から2次方程式

$$t^2 - \delta_1 t + 1 = 0 \dots \ast \text{ を解けば念願の } \alpha \text{ を求めることができる。}$$

この方程式を解くのは気が重いのであるが、我々が求めたのは α の値ではなく、

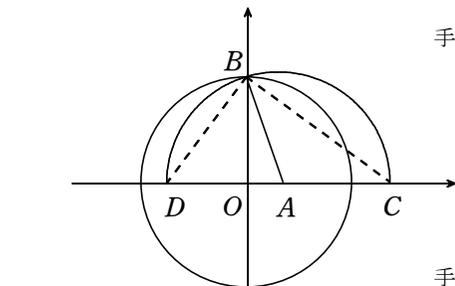
$\cos \frac{2\pi}{17}$ の値なので、わざわざ \ast を解く必要はない。

$$\delta_1 = \alpha + \alpha^{16} = \alpha + \frac{1}{\alpha} = 2 \cos \frac{2\pi}{17} \text{ なので(4)の結果より } \cos \frac{2\pi}{17} \text{ の値が得られる。}$$

$$\cos \frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16}(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17}} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}})$$

(7) 正17角形の作図 (しもまっちもんど (笑))

では最後に正17角形の作図に挑戦してみよう。



手順1 半径1の円Oを描き $OA = \frac{1}{4}$, $OB = 1$ をとる。

このとき

$$AB = \frac{\sqrt{17}}{4} \quad BC = \frac{\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}$$

$$BD = \frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}$$

手順2 Aを中心として半径ABの円を描く。

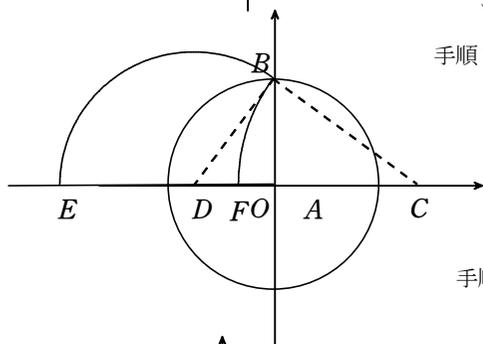
このとき $OC = \frac{\sqrt{17}+1}{4}$ $OD = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$

手順3 Dを中心として半径BDの円を描く。

Cを中心として半径BCの円を描く。

このとき $OE = \frac{\sqrt{17}-1}{4} + \frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}$

$$OF = \frac{\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4} - \frac{\sqrt{17}+1}{4}$$

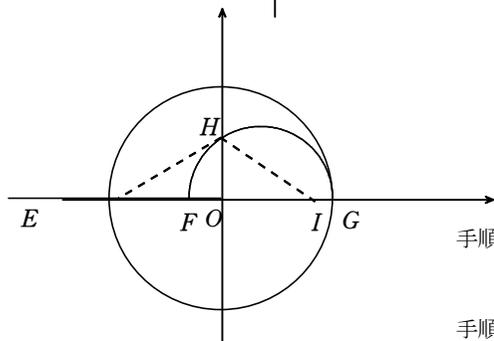


手順4 FGを直径とする円を描く。

このとき、方べきの定理より

$$OH^2 = OF \cdot OG = \frac{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}$$

$$OH = \frac{\sqrt{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{2}$$



手順5 $HI = \frac{1}{2}OE = \frac{\sqrt{17}-1 + \sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$

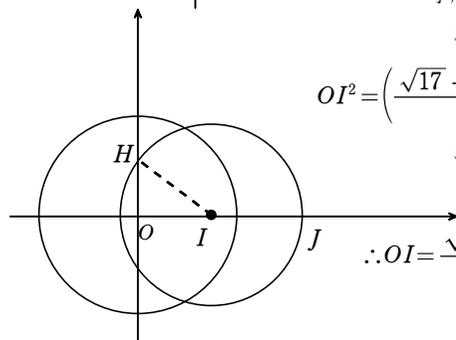
となるIをとる。

手順6 Iを中心として半径IHの円を描く

このとき $OI^2 = IH^2 - OH^2$

$$OI^2 = \left(\frac{\sqrt{17}-1 + \sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8} \right)^2 - \frac{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}$$

これは(5)の $r_1^2 - 4r_3$ の値である。



$$\therefore OI = \frac{\sqrt{17+3\sqrt{17} - \sqrt{34-2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{4}$$

$$OJ = \frac{\sqrt{17}-1 + \sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8} + \frac{\sqrt{17+3\sqrt{17} - \sqrt{34-2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{4}$$

これは(5)の δ_1 の値である。

手順6 OJの中点Mをとる。このとき $OM = \cos \frac{2\pi}{17}$ が得られるので、Mからx軸に垂線

を立てて、それが円と交わる2点が正17角形の頂点となる (図省略)。