【特別寄稿】

# 定水位操作の特性と課題

株式会社テクノ　今 村 瑞 穂*

キーワード　収束と発散・定水位操作関数・漸近関数

## まえがき

洪水調節操作へ移行する前や異常洪水時防災操作の終盤においては定水位操作が実行されます。この操作は「放流量＝流入量」によって達成される単純な操作という認識があります。しかしながら，この操作は放流量計算の遅れをともなうため，意図しない貯水位の上昇を伴うこととなります。一方，この遅れを回避しようとすれば，数学的に不安定な状況をともない，計算される放流量に乱れが生じることもあります。

そこで，先ず，これまで考えられてきた流入量と同じ量を放流するという定水位操作について解析的観点からその課題を分析しました。

これらの分析を踏まえて，新たに定水位操作関数を提案してその特性を分析して，現地適用にあたっての課題も明らかになってきました。さらに，新しく提案した定水位操作関数の現地適用にあたっての対応策についても考えてみました。

## 1. 現状定水位操作の特性

a.「放流量＝流入量」という定水位操作の解析的な評価

現場で実施されている定水位操作は「放流量＝流入量」により実施するという考え方が一般的です。しかしながら，この方法は必ずしも我々の期待した通りの結果を返してくれません。

通常，流入量計算は単位時間内の貯水池容量の増減と平均放流量の合計値として（1）式により計算されます。

$Q_i=(dV+\sum Q_o)/\Delta T$ ……（1）

$\Delta T$：計算単位時間（単位：sec）

$dV$：計算単位時間に増減した貯留量（単位：$m^3$）

$\sum Q_o$：計算単位時間内の積算全放流量（単位：$m^3$）

（注・（1）式において dV はあらかじめ作成した貯水位（H）と貯留量（V）の関係を示した H-V カーブより求められます。）

流入量計算式である（1）式は差分式により（2）式の様に示すことができます。

$$Q_i=Q_{on-1}+\frac{V_n-V_{n-1}}{\Delta T} \quad \cdots\cdots (2)$$

ここで，$Q_i$＝計算流入量，$Q_{on-1}$＝1ステップ前の放流量，$V_n$＝貯水量，$V_{n-1}$＝1ステップ前の貯水量，$\Delta T$＝計算時間間隔

さらに，（2）式をもとに「放流量＝流入量」により定水位操作を行うとすれば，$Q_{on}$＝放流量として，（3）式が得られます。

$$Q_{on}=Q_{on-1}+\frac{V_n-V_{n-1}}{\Delta T} \quad \cdots\cdots (3)$$

（3）式が差分式で示した場合の現況の定水位操作システムということができます。

（3）式を（4）式のように変換します。

$$Q_{on}-Q_{on-1}=\frac{V_n-V_{n-1}}{\Delta T} \quad \cdots\cdots (4)$$

（4）式は（5）式のように表現することができます。

$$dQ_o=\frac{1}{\Delta T}dV=cdV \quad \cdots\cdots (5)$$

$c=1/\Delta T$とし，V から独立した変数として以降の考察を展開することとします。

（5）式の両辺を積分すると（6）式が得られます。

$Q_o=cV+d$ ……（6）

ただし，d＝積分定数

（6）式は V の1次関数とする放流関数になりました。

つまり，標準操作規則による方法で流入量計算を行い，それと同じ量を放流するという，いわゆる「放流量＝流入量」による「定水位操作」は，（6）式で示すような，V の1次関数により放流量を決定する操作と同じで

＊ 技術顧問

あるということができます。

（６）式によりますと，定水位操作と言いながら，「仮に，ΔTを 600 s（c＝1/600）とすると，放流量が１ $m^3$/s 増える度に貯水量は 600 $m^3$ 増える」ということを示しています。（逆に言うと「放流量が１ $m^3$/s 増えるためには貯水量が 600 $m^3$ 増えなければならない」と言うことにもなります。）

放流量が 100 $m^3$/s 増えれば貯水量は 60000 $m^3$（貯水面積が１ $km^2$ であれば貯水位にして６ cm）増えることになり，無視できない値となります。つまり，流入量が増加する過程で「放流量＝流入量」による定水位操作を行えば貯水位は上昇し，逆に減少する過程では貯水位は下降します。

ダム操作の現場において「定水位操作をしているにも関わらず貯水位が変動する。」という声があがる実態があるのはこのことによるものです。

b. １次関数による放流量決定とその特性

現況「放流量＝流入量」による定水位操作と同値である（6）式のＶの１次関数の特性をもう少し考えてみたいと思います。

ここで，流入量を（7）式のように直線的に変化するものと仮定して，この流入量に対して（6）式の放流関数と（8）式の連続式を適用した場合の放流量を解析的に求めてみます。

$$Q_i = at + b \quad \cdots\cdots (7)$$

ここで，$Q_i$＝流入量，a＝定数，t＝時間，b＝定数

$$\frac{dV}{dt} = Q_i - Q_o \quad \cdots\cdots (8)$$

（6），(7)，(8）式を連立させて解くと（9）式が得られます。

$$Q_o = \left\{q_0 - \left(b - \frac{a}{c}\right)\right\} e^{-ct} + at + b - \frac{a}{c} \quad \cdots\cdots (9)$$

（9）式は t→∞とすると終局的には（10）式に収束します。

$$Q_o = at + b - \frac{a}{c} \quad \cdots\cdots (10)$$

（10）式について，横軸を t，縦軸を$Q_o$とする座標軸の上で考えてみますと，(10）式は（7）式と平行で，縦軸で（7）式より a/c 小さい値となっています。

ここで，(10）式の$Q_o$を 1/c 左に平行移動させた式を考えてみます。

$$Q_o(t + 1/c) = a(t + 1/c) + b - \frac{a}{c} = at + b \quad \cdots\cdots (11)$$

つまり，(10）式で計算される放流量は流入量を 1/c 右に平行移動させたものとなっています。

以上より，次のことが言えます。

①流入量が直線的に増加している場合，Ｖの１次関数を放流関数とすれば，放流量は流入量を時間的に平行移動させたものに収束していきます。

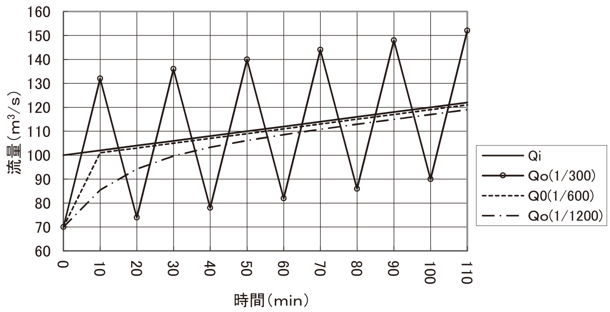
②平行移動の量は（6）式で示す放流関数のＶの係数を c とすれば，流入量の時間あたり増加量 a と関係なく，1/c となります。つまり，流入量から 30 分（＝1800 s）遅れの放流量を実現しようとすれば，(6）式の放流関数で c＝1/1800 とすればよいことになります。

c. Ｖの１次式による定水位操作関数の特性分析

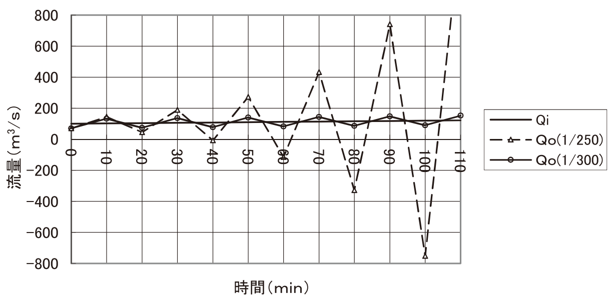
（６）式において 1/c は計算する放流量の流入量に対しての遅れ時間であるとすれば，可能な限り定水位操作に近い放流量を実現しようとすれば 1/c を可能な限り小さくすれば（0 に近づければ）よいことになります。しかしながら c を∞にすることは（6）式の数学的安定性に影響を及ぼすこととなります。

このような角度から（6）式の放流関数としての特性を分析してみることとします。

いま，流入量を仮定して，計算時間間隔ΔT＝600 s とし，それぞれ c＝1/1200，c＝1/600，1/300，1/250 とした場合の（6）式を放流関数とした場合の放流量の数値計算結果は，図－１－１～図－１－２に示す通りです。この時の初期状態は放流量＝70 $m^3$/s とします。




図－１－１　(6）式の c の値と放流量の収束状況




図－１－２　(6）式の c の値と放流量の発散状況

これらの図を見ると，c＝1/300を境に計算する放流量の安定と不安定の状況変化が明確に示されています。

これらの現象をもう少し階差式により解析的に考察してみます。

（６）式を差分化します。

$\Delta Q_o = c\Delta V$ ……（12）

計算時間間隔をΔTとして，さらに，現状における流入量を$Q_i$，放流量を$Q_o$とすると，ΔT間に生じる貯水量の差ΔVは次の通りとなります。（水の連続式）

$\Delta V = \Delta T(Q_i - Q_o)$ ……（13）

（12）式と（13）式からΔVを消去します。

$\Delta Q_o = c\,\Delta T(Q_i - Q_o)$ ……（14）

一方，放流量の収束条件は「計算する放流量が流入量を飛び越えて流入量との差が現在値より大きな差にならないようにという観点から」次の式によります。

$\Delta Q_o \leq 2\times(Q_i - Q_o)$ ……（15）

（14），（15）式から（$Q_i - Q_o$）を消去すると（16）式が得られます。

$c\,\Delta T < 2$ ……（16）

（16）式は（6）式に基づいて放流量を計算する場合，流入量と放流量の差が時間経過と共に収束するか発散するかの判定指標とすることが出来ます。

以上の結果と図－1－1，図－1－2の結果を重ね合わせると，ΔT＝10 min（＝600 s）とした場合，c＝1/300を境にして計算する放流量の安定，不安定の変化状況を確認することができます。（図－1－1と図－1－2の関連性を明確にするために$Q_o$（c＝1/300）を両図に表示しています。）

このことは，出来るだけ遅らせ時間を短くして，定水位操作に近づけようとしても，計算時間間隔ΔTが600 sのとき，貯水位の意に反した上昇を解消するために遅れ時間を300 s以下に短縮しようとすれば計算する放流量は発散することを示しています。

（６）式的に見ると，ΔT＝600 sで流入量を計算してその量を放流するといういわゆる現在の定水位操作ではc ΔTの値は１となりますから安定領域にあると言えます。

一方，c＝1/600として，計算時間間隔ΔT＝600 sで放流を続けてきたとします。そこで，仮に流入量が安定したことを理由に，放流関数の係数ｃの値を変えないまま計算時間間隔ΔTを1800 secに変更したとしますと，c ΔT＝3となり，この操作は安定領域を超えて発散領域になりますから，計算する放流量の不安定要因になります。

従って，流入量が安定したからと言って，安易に操作間隔ΔTを長い方に変更することは操作の安定性を阻害する危険性があり，このような観点からc ΔTの動向に注視して，この値は余裕をもって設定しておく必要があると言えます。

## 2. 改良型定水位操作関数の提案とその特性

定水位操作関数の改良案として，階差式で示す現況定水位操作関数（3）式に対して，次式に示すように右辺の第３項により放流量を補正する定水位操作関数を考えてみます。

$$Q_{on} = Q_{on-1} + \frac{1}{\Delta T}\times(V_n - V_{n-1}) + \frac{1}{\Delta T}(V_n - v_u) \quad \cdots\cdots (17)$$

ここで，$v_u$＝目標貯水量

この結果は，計算過程における，水位の上昇・下降等の課題は大幅に是正されますが，さまざまな外部からの貯水位攪乱に対する過敏な応答が新たな課題として発生することになります。

（３）式，（17）式のようなΔTの形に固執することなく，さらに自由度の高い考え方に立てば（（17）式において右辺の各項の定数を1/ΔTから$K_1$，$K_2$に自由度を高める。），式の形は一般的な減衰振動（常２階微分方程式）の特性を有しており，適切に$K_1$，$K_2$を選択することにより振動数と減衰の速度をコントロールすることができます。

このことにより，時間経過と共に安定的に所定の流入量と貯水量（$v_u$）に収束していくことが期待できます。このような中で計算する放流量の安定性を求めることも可能です。

（18）式を改良型定水位操作関数と呼ぶこととします。

$Q_{on} = Q_{on-1} + K_2(V_n - V_{n-1}) + K_1(V_n - v_u)$ ……（18）

この中で，（17）式は（18）式において，$K_1 = K_2 = 1/\Delta T$というかたちの限定した状態を示していたということが出来ます。

（18）式において$K_1 = K_2 = 1/2000$程度にすると，より安定した定水位操作を実行出来ることが判りました。（$K_1 = 0$，$K_2 = 1/600$とすれば（3）式に置き換る。）

以上，改良型定水位操作関数についての詳細な特性分析については参考文献１を参照してください。

いま，初期値として任意の放流量と貯水量の状態を仮定して，収束していく目標とする流入量と貯水量を設定して，これに対して（18）式により流入量に対して放流量を近づけるとともに貯水量を目標の貯水量に近づけていく操作の試算を行ってみます。

流入量$Q_i$を（19）式のような直線的に増加する関数と

考えてみます。

$Q_i = at + b$ ……（19）

ただし，a＝時間当たり増加量（5/600 $m^3/s/s$），t＝時間（s）

目標とする貯水量$v_u$は 6700000 $m^3$ とします。

（19）式に対して（18）式の放流関数で放流する場合，放流開始時の初期値（放流量，貯水量）の組み合わせを表－1 に示す 0～3 ケースの 4 通り考えてみます。

表－1　計算ケース一覧（初期値）

| ケース番号 | 放流量 ($m^3/s$) | 貯水量 ($m^3$) | 備考 |
|---|---|---|---|
| 0 | 100 | 6700000 | 流入量―放流量＝0，空容量＝0 |
| 1 | 100 | 6600000 | 流入量―放流量＝0，空容量＝100000 |
| 2 | 0 | 6700000 | 流入量―放流量＝100，空容量＝0 |
| 3 | 0 | 6600000 | 流入量―放流量＝100，空容量＝100000 |

注-1、初期流入量＝100 $m^3/s$，目標貯水量は 6700000 $m^3$。
注-2、ケース 0 を定水位状態と定義する。

それぞれのケースの計算結果，放流量が流入量に収束していく状況と貯水量が目標貯水量に収束していく状況を図－2－1 に示しています。図においては N ケースの放流量を$Q_o$N，貯水量を VN として表示しています。

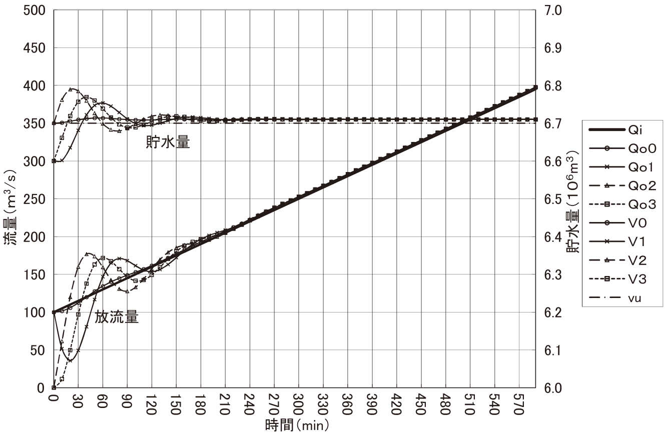
この結果，0 ケ―スにおいては比較的安定した定水位操作が実現されていますが（この状態を「定水位状態」と呼ぶ。以下同じ。），1，2，3 ケースにおいては放流量も貯水量も上下に変動を繰り返しながら目標値である流入量と目標貯水量に収束しています。

これでは定水位状態に収束するまでの間は定水位操作関数の条件としては不適格と言わざるを得ません。（この状態を「収束前状態」と呼ぶ。以下同じ。）

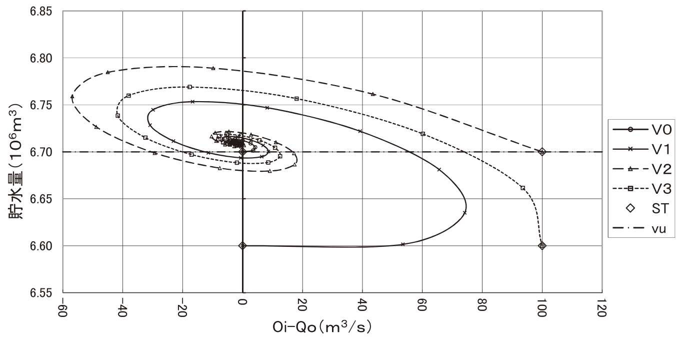
いま，図－2－1 と同じ放流量，貯水量の関係について，縦軸を貯水量，横軸を（$Q_i-Q_o$）とする相関図を描いてみます。（$Q_i-Q_o$）が 0 $m^3$，V＝6700000 $m^3$ となれば定水位状態になったということになります。

その結果が図－2－2 です。図においては N ケースの相関図を VN として表示しています。それぞれの計算の初期状態を ST で示しています。

この図を見ると，定水位状態である V0 のみはすでに収束状態に近いと言えますが，それ以外の 3 ケースは，どのケ―スを見ても歪んだ蚊取り線香型の同心のサイクルを描きながら同じ一つの点に収束しています。収束点が終局的な定水位状態であるということができます。しかしながら，収束点は当初想定した（0，6700000）とはなっていません。この収束点の貯水量の縦軸上の座標は解析的に見ると（20）式のようになります。




図－2－1　改良型定水位関数による放流量の収束状況




図－2－2　改良型定水位放流関数の収束状況（Q-V 相関）

$$V_{t\to\infty} = \frac{a}{k_1} + v_u \quad \cdots\cdots (20)$$

ここで a＝単位時間当たり流入量の増加量，$k_1 = K_1 / \Delta T$，$v_u$＝目標貯水量

（（20）式の誘導方法については参考文献 1 を参照のこと。）

したがってこのケースでは貯水量の収束点のずれは目標貯水量より 10000 $m^3$ 大きくなっています。しかしながら，従来方式（（3）式）による貯水量の上昇に比べるとはるかに小さい値であると言えます。

また，（$Q_i-Q_o$）は解析的には 0 となりますが，このケースでは－2.5 $m^3/s$ となっています。

放流量の収束値は解析的には流入量と同じになりますが，差分計算における計算結果と解析解の差として示されたものと考えられます。（時間軸上 $t_n$ の直前の放流量は$Q_{on-1}$，直後の放流量は$Q_{on}$であり，実際は（$Q_{on-1}+Q_{on}$）/2 であるが，グラフ上の表現は$Q_{on}$となっている。）

以上，改良型定水位操作関数の収束特性について考察しましたが，収束前状態から定水位状態までどのようにして誘導していくかが定水位操作関数の現地適用における課題であることが判りました。

0ケースのみが比較的に安定した状態で終局的な定水位操作に移行できるということは，どのようにすれば任意の貯水量と放流量の状態から0ケースのような定水位状態に近づけていけるかということになります。

## 3. 定水位状態へのアプローチ方法（漸近関数）

任意の前期放流状態から放流量が流入量に漸近し，さらには貯水位も目標貯水位に（定水位状態に）どのようにすれば漸近していく事ができるかという課題について考えてみます。

いま，定水位状態へアプローチするための漸近関数として（21）式を考えてみます。

$$Q_o = q_m + \frac{(Q_i - q_m)}{(v_u - v_m)}(V - v_m) \quad \cdots\cdots (21)$$

ここで，$Q_o$＝放流量，$Q_i$＝流入量，V＝貯水量，$q_m$＝1ステップ前の放流量，$v_m$＝1ステップ前の貯水量，$v_u$＝目標とする設計洪水位時（または洪水期制限水位時）の貯水量

この式は現状の放流量を$q_m$，貯水量を$v_m$として放流量を逐次決定していくとすると，貯水量Vが$v_u$となった時には自動的に放流量は$Q_i$となるようになっています。

従って，（21）式そのものによって，一見，漸近関数と定水位操作関数の2つの機能を兼ね備えているように見えます。このような観点から（21）式について流入量を仮定して放流量を計算し，その特性を分析してみることとします。

しかしながら，右辺第2項の（ ）内の3つの要素はいずれも0に収束して行く事が読み取れます。特に分母となる（$v_u - v_m$）が0に収束するということは操作の安定上看過できません。このような視点からも（21）式の特性を分析してみる必要があります。

対象とする流入量は（19）式として，初期条件は表−1の1ケースを考えてみます。

初期段階は現在放流量を継続しながら，（22）式に示す限界流入量が（19）式に示す流入量に等しくなった段階から（21）式により放流を開始して，下流河道の水位上昇速度をコントロールしながら放流量が流入量に漸近して行く操作を行うこととします。

$$Q_{ic} = q_m + \sqrt{2\sqrt{Kq_m} \times H_c \times (v_u - V)} \quad \cdots\cdots (22)$$

ただし，$Q_{ic}$＝限界流入量，$q_m$＝放流量，K＝河道の水理定数（K＝20 m/sとする。），$H_c$＝水位上昇速度の目標値（30 cm/30 min），V＝貯水量，$v_u$＝目標水位時の貯水量

計算結果を図−3−1に示しています。この図は（21）式による放流を継続した場合の放流量と貯水量のハイドログラフです。

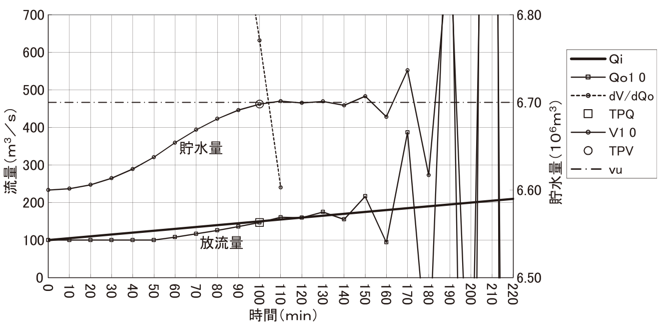
初期条件は1ケースと同じ数値（100 $m^3$/s，6600000 $m^3$）で，計算された放流量を$Q_o$10，貯水量をV10として示しています。また，$dQ_o/dV$を（23）式で計算して，その逆数（$dV/dQ_o$）を流量と同じ座標軸で示しています。（以後，この逆数の形で表現したもので考察します。）

$$\frac{dQ_o}{dV} = \frac{(Q_i - q_m)}{(v_u - v_m)} \quad \cdots\cdots (23)$$

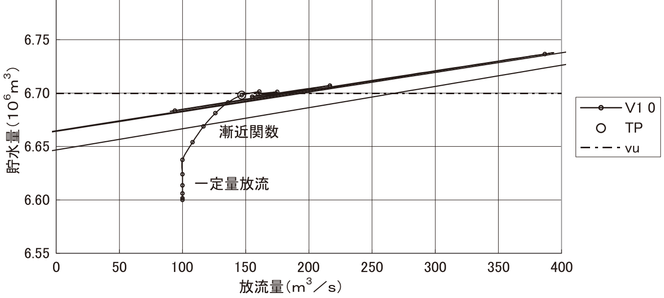
図−3−1で放流量が流入量に接近したころ（時間軸で100 minを超えるころ，TPQ，TPV）からは計算された放流量も貯水量も不安定な状態となっていることがわかります。つまり，（21）式は放流量が流入量に漸近していく関数としては適用可能ですが，漸近状態が究極まで進行した段階では，いわゆる定水位操作関数としては適用不可能であると言えるようです。

図−3−2には，計算された放流量と貯水量の相関図を示しています。貯水量が殆ど目標貯水量に近づき（TP）（放流量が流入量に殆ど追いついた頃。）以降，相関図は激しく乱れています。

この時の$dV/dQ_o$を図−3−1で見ると300以下となっています。




図−3−1　漸近関数の発散状況




図−3−2　漸近関数の発散状況（Q-V相関）

これらの現象は，（16）式に立ち戻って見ると計算される放流量が発散領域にあることを示しているということができます。

従って，漸近関数である（21）式により放流するに当たっては（23）式により$dV/dQ_o$を計算しながら，$dV/dQ_o$の値が300以下にならない段階まで（実務上は安全を見て$dV/dQ_o$の値が600程度になる段階まで，これは流入量を10分間間隔で計算する場合と同じ安定度となる。）放流量を流入量に漸近させ，その後，（18）式による定水位操作に移行するのが適当であると考えられます。

このような考え方に基づき漸近関数から定水位操作関数への移行を試算してみたのが図－4－1の$Q_o$10とV10です。

$Q_o$10は①一定量放流→②（21）式による漸近関数による放流量（TPQ10）→③（18）式による定水位操作関数による計算結果です。

V10も同様に①一定量放流→②（21）式による漸近関数による放流量（TPV10）→③（18）式による定水位操作関数による計算結果です。

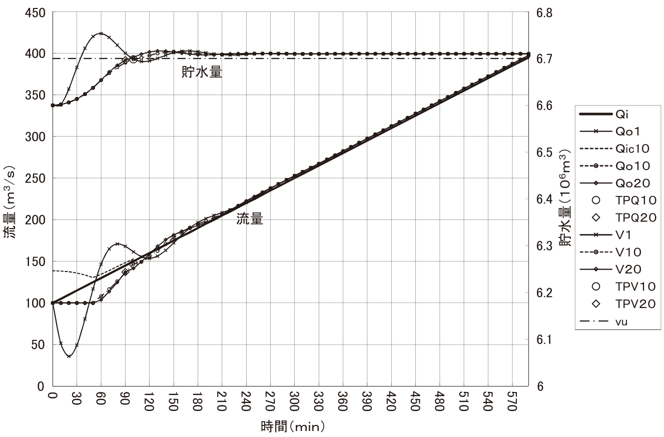
放流量も貯水量も最初から定水位操作関数の場合（$Q_o$1，V1）（図－2－1，図－2－2のケース1に同じ）と比較すると，それぞれの操作変更点（TPQ10，TPV10）において適切に引き継ぎが行われ，それぞれの操作関数が適切にその役割を果たして安定的に定水位操作関数への移行が実行されていると言えます。

図－4－2では図－4－1に示したそれぞれのケースにおける（$Q_i-Q_o$）と貯水量の相関図をV10として示しています。

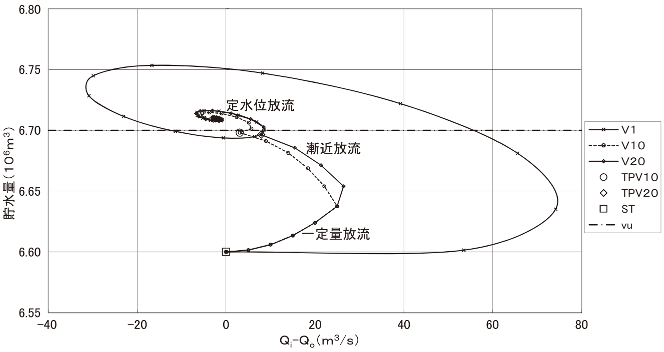
この図を見ると，蚊取り線香型の収束螺旋のかなり中心に近いところ（TPV10）で漸近関数から定水位操作関数に乗り換えていることが判ります。（TPV10）は漸近関数が未だ発散しない安定した状態で，しかも，定水位操作関数は定水位状態に近いということができます。つまり，$dV/dQ_o=600$を漸近関数から定水位操作関数に安定的に乗り換える際の判断指標とすることの妥当性を示しているということができます。

（21）式の漸近関数は不安定状況を計算上表現しやすい関数の1例としてここで紹介しました。漸近関数としては様々な関数の形があると思いますがそれぞれのダムにおいて採用されている漸近関数の安定性については，このような視点からチェックしておくことをお勧めいたします。

次に，漸近関数を限界放流量方式とする場合も考えられます。




図－4－1　限界放流量による漸近




図－4－2　限界放流量による漸近（Q-V相関）

限界放流量は（22）式の左辺の$Q_{ic}$を流入量$Q_i$と置き換えた場合の$q_m$の値として求めることができます。（詳細については参考文献2を参照のこと。）

つまり（21）式で計算する放流量で限界流入量を計算すると常に流入量に等しいという条件を満足するような放流量で（23）式で$Q_{ic}$を$Q_i$と置き換えて求める$q_m$の値です。

言い換えれば，下流の水位上昇速度を制御するための最小の放流量と言い換えることができます。

この時の$dV/dq_m$は（24）式の逆数として求めることができます。

$$\frac{dq_m}{dV}=\frac{4\,q_m(dQ_i/dt+\sqrt{Kq_mH})}{(Q_i-q_m)\times(Q_i+3\,q_m)} \quad \cdots\cdots \ (24)$$

（（24）式の誘導方法は巻末の参考資料として掲載しています。）

従って，限界放流量で計算をする過程で（24）式で計算する値の逆数である$dV/dq_m$が600より小さくなった段階で（18）式による定水位操作に移行すれば安定的な定水位操作への移行が実現できることになります。

（22）式は$v_u \geqq V$の範囲で成立します。したがって数

値計算ですから場合によっては$v_u \geqq V$の条件が満足できず計算が不能となる場合があります。その場合は$dV/dq_m$が600より小さいという条件を満足しない場合でも定水位状態が満足されたとして，定水位操作関数に移行することが可能です。

以上のような考え方に基づいて放流量を計算したものが図－4－1に示す$Q_o$20とV20です。(21) 式による漸近関数の場合（$Q_o$10，V10）とほぼ同じ傾向を示しています。

同様に，図－4－2では図－4－1に示したそれぞれのケースにおける（$Q_i - Q_o$）と貯水量の相関図をV20で示しています。この場合も，V10と同じ傾向を示しており TPV20で適切に定水位操作関数への移行がなされています。

従って，限界放流量方式による計算値を漸近関数として適用する場合，(24) 式を漸近関数から定水位操作関数への移行の判断指標として支障ないものと考えられます。

## 3. ま と め

以上，現況定水位操作関数とその特性について考察し，さらに改良型定水位操作関数を提案しその特性を分析した上で，その延長上で現地適用方法について提案しました。

これらの考察をまとめると以下のとおりです。

① ダム管理例規集に示された方法（(1) 式）により流入量を計算する場合，計算時間間隔$\Delta T$を10分とすると，流入量計算の時間遅れは理論的に約10分となります。

従って，(1) 式で流入量を計算してこれと同じ量を放流するという，いわゆる「流入量＝放流量」による定水位操作は10分の時間遅れを生じていることとなります。

② ①の実態を反映して，現場においては「定水位操作をしているにもかかわらず水位が上昇する。」という意見となって返ってくることとなります。

③ 一方，貯水量Vの1次関数（(6) 式）により放流量を決定する場合，放流量はVの係数cの逆数の時間遅れの流入量に漸近して収束します。

従って，$c = 1/600$として (6) 式で計算してこれを放流する場合と (1) 式で流入量を計算してこれと同じ量を放流する従来の定水位操作は同じとなります。

④ (6) 式的にいうとcの値を大きくとると（1/cの値を小さくとると）限りなく定水位操作に近い操作を実現することができることになります。

しかしながら，cの値を大きくとると (6) 式による放流量の計算値が不安定化することとなります。不安定化の限界は (16) 式で示す$c\,\Delta T < 2$であります。つまり，$\Delta T = 600$ sとすると，$c < 1/300$となります。言い換えると，(6) 式で放流量を計算する場合，放流の時間遅れを300 s以下に短縮しようとすると計算する放流量が不安定状態となります。

⑤ 結論的には，これまでの操作の実績も踏まえ，決定する放流量の安定性を確保しようとすれば600 s程度の遅れは覚悟しなければなりません。

したがって，現状では，定水位操作と言いながら操作の安定を確保するためには相応の貯水位の上昇を前提としなければなりません。

この現実を受け止めた上で定水位操作の管理は行われるべきと思われます。

⑥ (1) 式により流入量を計算してこれを放流するという従来型の定水位操作方式に替えて，(18) 式により放流量を決定する方法（改良型定水位操作関数）を提案しました。

しかしながら，この関数は定水位状態からのスタートをおこなえば安定的に放流量は流入量に収束していきますが，それ以外の場合は定水位状態に至るまで，放流量，貯水量共に目標値の周辺で変動を繰り返しながら収束していく，いわゆる収束前状態の現象が発生します。この収束前状態は定水位操作としては不適格であります。

⑦ 上記収束前状態を回避するために目標値に漸近していくための漸近関数を適用して任意の状態から定水位状態への放流量と貯水量の漸近を図ることを提案しました。

⑧ しかしながら，漸近関数は限りなく定水位状態に漸近すると計算する放流量と貯水量が発散する（不安定となる）ことが判りました。

⑨ 発散は漸近関数から計算される$dV/dQ_o$が300以下となれば発生するということが判りました。なお，操作規則において流入量を計算し，これを放流するという操作を放流関数的に見るとその関数の$dV/dQ_o$は$\Delta T$を10 min（600 s）とすると600となります。したがって，$dV/dQ_o = 600$は操作の実績上許容されているものとすれば，この値を漸近関数から改良型定水位操作関数への移行時の指標とすることは可能と考えられます。

こうすることにより$dV/dQ_o = 600$は漸近関数から放流量の不安定（発散）状態を回避するとともに，改良型定水位操作関数により定水位操作へ移行する際の

収束前状態を回避するための指標であると言えます。

⑩　以上，改良型定水位操作関数を提案し，漸近関数から改良型定水位操作関数への移行方法を提案し，定水位操作の精度と安定度の向上を期待することが可能であることが判りました。しかしながら，改良型定水位操作関数においてもその関数の特性上目標水位を上まわる可能性も指摘しました。

一方，操作規則においては

1. 定水位操作においては，目標とする水位を上まわってはならない。
2. 「原則として，貯水位を低下させる時以外，放流量は流入量を上回ってはならない。」とされています。

本稿で考察した定水位操作関数においても，改善されたとは言え，理論的にこの条件を満足できないことは明らかです。多くの現場担当者がこの条件満足のために苦慮していることに鑑み，定水位操作時の水位管理における操作規則のあり方の面からの対処が必要であると考えられます。

参考資料（24）式の誘導

（22）式で$Q_{ic}$を$Q_i$に置き換える。

$$Q_i = q_m + \sqrt{2\sqrt{Kq_m} \times H_c \times (v_u - V)} \quad \cdots\cdots (25)$$

$$(Q_i - q_m)^2 = 2\sqrt{Kq_m}H_c(v_u - V) = 2\sqrt{K}H_c \times \sqrt{q_m}(v_u - V) \quad \cdots\cdots (26)$$

（26）式の両辺を V で微分する。

$$2(Q_i - q_m)\left(\frac{dQ_i}{dV} - \frac{dq_m}{dV}\right) = 2\sqrt{K}H_c\left(\frac{v_u - V}{2\sqrt{q_m}} \times \frac{dq_m}{dV} - \sqrt{q_m}\right) \quad \cdots\cdots (27)$$

$$(Q_i - q_m)\left(\frac{dQ_i}{dt} \times \frac{dt}{dV} - \frac{dq_m}{dV}\right) = \sqrt{K}H_c\left(\frac{v_u - V}{2\sqrt{q_m}} \times \frac{dq_m}{dV} - \sqrt{q_m}\right) \quad \cdots\cdots (28)$$

$$(Q_i - q_m)\left(\frac{dQ_i}{dt} \times \frac{1}{(Q_i - q_m)} - \frac{dq_m}{dV}\right) = \sqrt{K}H_c\left(\frac{v_u - V}{2\sqrt{q_m}} \times \frac{dq_m}{dV} - \sqrt{q_m}\right) \quad \cdots\cdots (29)$$

$$\frac{dQ_i}{dt} + \sqrt{Kq_m}H_c = \left\{\frac{\sqrt{K}H_c(v_u - V)}{2\sqrt{q_m}} + (Q_i - q_m)\right\}\frac{dq_m}{dV} \quad \cdots\cdots (30)$$

$$\frac{dq_m}{dV} = \frac{dQ_i/dt + \sqrt{Kq_m}H_c}{\dfrac{\sqrt{K}H_c(v_u - V)}{2\sqrt{q_m}} + (Q_i - q_m)} \quad \cdots\cdots (31)$$

$$\frac{dq_m}{dV} = \frac{dQ_i/dt + \sqrt{Kq_m}H_c}{\dfrac{2\sqrt{Kq_m}H_c(v_u - V)}{4\,q_m} + (Q_i - q_m)} \quad \cdots\cdots (32)$$

（32）式の一部を（26）式で置き換える。

$$\frac{dq_m}{dV} = \frac{4\,q_m(dQ_i/dt + \sqrt{Kq_m}H_c)}{(Q_i - q_m)^2 + 4\,q_m(Q_i - q_m)} \quad \cdots\cdots (33)$$

$$\frac{dq_m}{dV} = \frac{4\,q_m(dQ_i/dt + \sqrt{Kq_m}H_c)}{(Q_i - q_m) \times (Q_i + 3\,q_m)} \quad \cdots\cdots (34)$$

## 参 考 文 献


1）定水位操作における課題と改善に関する考察　今村瑞穂　日野徹　芳地康征　ダム工学　ダム工学会　2007 年 3 月

2）限界放流量方式による洪水前放流操作　今村瑞穂　ダム技術　ダム技術センター　2017 年 12 月