ダム技術資料寄稿文

「放流の原則と洪水調節効果を目指した異常洪水時防災操作」

に関する補足説明資料

目　　次

1.限界流入量 Q_{ci} の定義と限界放流量方式の背景

本文の（2-1）式及び（2-2）式の補足説明である。

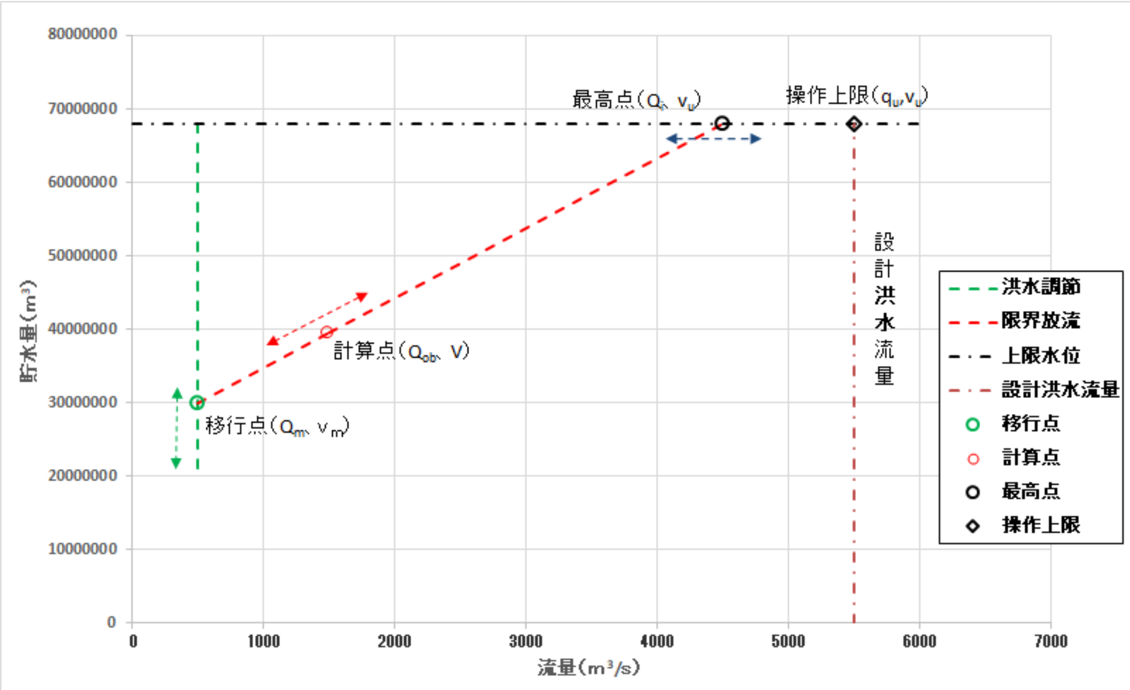

図-1 放流関数(1)式のイメージ

図－ 1 において（Q_m、 v_m）点は洪水調節操作から異常洪水時操作への移行点
。
（Q_i、v_u）点は貯水位が v_u になったときに放流量が流入量に追いついた状況
。
（Q_{ob}、V）点はただし書き操作に移行後の任意の V （ただし、$v_m < V < v_u$）における Q_{ob} を示している。
これらの関係のなかで Q_{ob} を示すと（1）式が得られる。

$$Q_{ob} = Q_m + \frac{(V - v_m)}{(v_u - v_m)}(Q_i - Q_m) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

（１）式において$V = v_m$と置くと$Q_{ob}=Q_m$である。
$V=v_u$と置くと$Q_{ob} = Q_i$である。
つまり、（1）式は、洪水調節関数と連携して貯水位が最高水位 vu になったときに放流量＝流入量となる。
次に（１）式を t で微分すると（２）式が得られる。

$$\frac{dQ_{ob}}{dt}=\frac{dQ_i}{dt}\times\frac{(V-v_m)}{(v_u-v_m)}+\frac{(Q_i-Q_m)}{(v_u-v_m)}\times\frac{dV}{dt}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

一方、下流河道の水位上昇速度を考えるから、下流河道の H-Q 関係を下記のとおり設定する。

$$Q_{ob} = K(H-h_0)^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

（３）式を t で微分すると（４）式が得られる。

$$\frac{dQ_{ob}}{dt}= 2K(H-h_0)\times\frac{dH}{dt}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

（２）式と（４）式を連立さて、dQ_{ob}/dtを消去すると（５）式が得られる。

$$\frac{dH}{dt}=\left\{\frac{dQ_i}{dt}\times\frac{(V-v_m)}{(v_u-v_m)}+\frac{(Q_i-Q_m)}{(v_u-v_m)}\times(Q_i-Q_{ob})\right\}\times\frac{1}{2K(H-h_0)}\cdots\cdots(5)$$

（３）式と（５）式から K（H-h$_0$）を消去すると（６）式が得られる。

$$\frac{dH}{dt}=\left\{\frac{dQ_i}{dt}\times\frac{(V-v_m)}{(v_u-v_m)}+\frac{(Q_i-Q_m)}{(v_u-v_m)}\times(Q_i-Q_{ob})\right\}\times\frac{1}{2\sqrt{KQ_{ob}}}\cdots\cdots(6)$$

（６）式で洪水調節からただし書き操作へ移行すると$V = v_m$であるから
、（６）式は（７）式の通りとなる。

$$\frac{dH}{dt}=\left\{\frac{(Q_i-Q_m)}{(v_u-v_m)}\times(Q_i-Q_{ob})\right\}\times\frac{1}{2\sqrt{KQ_{ob}}}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

$$\frac{dH}{dt}=\frac{(Q_i-Q_m)(Q_i-Q_{ob})}{(v_u-v_m)}\times\frac{1}{2\sqrt{KQ_{ob}}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

さらに、洪水調節からただし書き操作へ移行する瞬間であれば、（８）式においては $Q_m = Q_{ob}$ である。その結果（９）式が得られる。

$$\frac{dH}{dt}\left(=H_c\right)=\frac{\left(Q_i\text{-}Q_m\right)^2}{\left(v_u\text{-}v_m\right)}\times\frac{1}{2\sqrt{KQ_{ob}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

（９）式の右辺　（＝ H_cと）と置とおいて、Q_i ＝の形に整理すると（10）式が得られる。

$$Q_i = Q_{ob}+\sqrt{2\sqrt{K\times Q_{ob}}\times H_c\times\left(v_u\text{-}V\right)} \quad (=Q_{ci}) \quad \cdots\cdots (10)$$

（10）式の右辺を Q_{ci} として、これを限界流入量と定義する。

$$Q_{ci} = Q_{ob}+\sqrt{2\sqrt{K\times Q_{ob}}\times H_c\times\left(v_u\text{-}V\right)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{-}1)$$

（2-1）式により求める限界流入量 Q_{ci} が流入量 Q_i に等しくなった時に下流河道の水位上昇速度が H_c となる。

2.要領操作による放流量の水位上昇速度
本文の（３）式の誘導に関する補足説明である。

$$\frac{dh_a}{dt}=\sqrt{\frac{C}{K}} \times\sqrt{\frac{Q_{oa}-Q_m}{Q_{oa}}}\times\frac{Q_i-Q_{oa}}{A\ (h)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

要領操作における放流関数は（1-1）式のとおりである。

$$Q_{oa} = ((3600\text{-}500)/4.5^2)\times(h\text{-}578.5)^2+500 \cdots\cdots (1\text{-}1)$$

（1-1）式において、（3600-500）/4.5^2=C　とおくと（２）式となる。
また、500 は洪水調節計画の放流量であるから Q_m と置ける。

$$Q_{oa}=C\left(h\text{-}578.5\right)^2+500=C\left(h\text{-}578.5\right)^2+Q_m \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\frac{dQ_{oa}}{dt}=2C(h\text{-}578.5)\frac{dh}{dt}=2\sqrt{C\left(Q_{oa}\text{-}Q_{m}\right)}\times\frac{dh}{dt}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ここで、標高ｈにおける貯水池面積をＡ（ｈ）とすると、$\frac{dV}{dh}$=A(ｈ)であるから、$\frac{dV}{dt}\times\frac{dt}{dh}$＝A($h$)より、（４）式が得られる。

$$\frac{dh}{dt}=\frac{1}{A(h)}\times\frac{dV}{dt}=\frac{1}{A(h)}\times\left(Q_{i}\text{-}Q_{oa}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(4)式を（３）式に代入すると（５）式が得られる。

$$\frac{dQ_{oa}}{dt}=2\sqrt{C\left(Q_{oa}\text{-}Q_{m}\right)}\times\frac{1}{A(h)}\times\left(Q_{i}\text{-}Q_{oa}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

一方、下流河道の H-Q 関係は（６）式のとおりである。

$$Q_{oa}=K\left(H\text{-}h_{0}\right)^{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

（６）式から（７）式が得られる。

$$\frac{dQ_{oa}}{dt}=2K\left(H\text{-}h_{0}\right)\times\frac{dH}{dt}=2\sqrt{KQ_{oa}}\times\frac{dH}{dt}\cdots\cdots\cdots(7)$$

（５）式と（７）式から（８）式が得られる。

$$\frac{dH}{dt}\left(=H_{a}\right)=\sqrt{\frac{C}{K}}\times\sqrt{\frac{Q_{oa}-Q_{m}}{Q_{oa}}}\times\frac{Q_{i}-Q_{oa}}{A\left(h\right)}\cdots\cdots\cdots(8)$$

（８）式を見ると、要領操作による放流量による水位上昇速度は河道の水理特性（K）、貯水池の地形特性（C、A(h)）、流入量（Q_i）、放流量（Q_{oa}）、洪水調節放流量（Q_m）等に複雑に支配されるが、放流の初期（$Q_{oa}=Q_m$）と放流量が流入量に追いつく瞬間（$Q_{oa}=Q_i$）には、水位上昇速度

($\frac{dH}{dt}$ (=Ha)）は 0 になる。

3.限界放流量方式による放流量の水位上昇速度

本文の（５）式及び（６）式の解析的補足説明である。

(1)式は限界放流量方式により放流量を計算する式である。

$$Q_i = Q_{ob} + \sqrt{2\sqrt{K \times Q_{ob}} \times H_c \times (v_u - V)} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

（１）式を変形して（２）式を得る。

$$Q_i - Q_{ob} = \sqrt{2\sqrt{K \times Q_{ob}} \times H_c \times (v_u - V)} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

（２）式を変形して（３）式を得る。

$$(Q_i - Q_{ob})^2 = 2\sqrt{K \times Q_{ob}} \times H_c \times (v_u - V) \cdots\cdots\cdots (3)$$

（３）式の両辺を t で微分すると（４）式を得る。

$$2 \times (Q_i - Q_{ob}) \times \left(\frac{dQ_i}{dt} - \frac{dQ_{ob}}{dt}\right) = 2\sqrt{K} \times H_c \times (v_u - V)\frac{1}{2\sqrt{Q_{ob}}} \cdot \frac{dQ_{ob}}{dt}$$

$$-2\sqrt{KQ_{ob}} \times H_c \times \frac{dV}{dt} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

（４）式から dQ_{ob}/dt を求める。

$$\frac{dQ_{ob}}{dt} = \frac{2(Q_i - Q_{ob})\frac{dQi}{dt} + 2\sqrt{KQ_{ob}} \times H_c \times \frac{dV}{dt}}{\sqrt{\frac{K}{Q_{ob}}} \times H_c \times (v_u - V) + 2(Q_i - Q_{ob})} \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

ここで、$\frac{dV}{dt} = (Q_i - Q_{ob})$、また、（２）式より $(v_u - V) = \frac{(Q_i - Q_{ob})^2}{2H_c\sqrt{KQ_{ob}}}$

であるから、これらを（５）式に代入して整理すると（６）式が得られる。

$$\frac{dQ_{ob}}{dt} = \frac{2 \times \frac{dQi}{dt} + 2\sqrt{KQ_{ob}} \times H_c}{\frac{1}{2Q_{ob}} \times (Q_i - Q_{ob}) + 2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

次に、下流河道のH-Q関係は（７）式のとおりとすると（８）式が得られる
。

$Q = K(H-h_o)^2$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・（７）

$\frac{dQ}{dt}=2K(H-h_0)\times\frac{dH}{dt} = 2\sqrt{KQ}\times\frac{dH}{dt}$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・（８）

(8)式から（９）式が得られる。

$\frac{dQ_i}{dt}=2K(H-h_0)\times\frac{dH(Q_i)}{dt} = 2\sqrt{KQ_i}\times\frac{dH(Q_i)}{dt}=2\sqrt{KQ_i}\times H_i$ ・・・・・（９）

ただし、H（Qi）＝流入量による河道の水位、Hi＝流入量による河道の水位上昇速度。

$\frac{dQ_{ob}}{dt}=2K(H-h_0)\times\frac{dH(Q_{ob})}{dt} = 2\sqrt{KQ_{ob}}\times\frac{dH(Q_{ob})}{dt}=2\sqrt{KQ_{ob}}\times H_{ob}$ ・・（10）

ただし、$H(Q_{ob})$=放流量による河道の水位、H_{ob}＝放流量による河道の水位上昇速度。
（９）式、（10）式を（６）式に代入して $dH(Q_{ob})/dt(=H_{ob})$を（11）式のように求める。

$\frac{dH(Q_{ob})}{dt}=H_{ob}=\frac{2\sqrt{\frac{Q_i}{Q_{ob}}}\times H_i+H_c}{\frac{1}{2Q_{ob}}(Q_i-Q_{ob})+2}=\frac{4\sqrt{Q_i\times Q_{ob}}\times H_i+2H_c\times Q_{ob}}{Q_i+3Q_{ob}}$ ・・・・・・・（11）

（11）式において$Q_{ob}=Q_i$、つまり、放流量が流入量に追いつく瞬間には（12）式のようになる。

$\frac{dH(Q_{ob})}{dt}=H_{ob}=H_i+\frac{H_c}{2}$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・（12）

つまり、限界放流量方式においては（11）式に見られるように
Q_i、Q_{ob}、H_i、H_cに複雑に支配される水位上昇速度となるが、放流量が流入量

に追いつく瞬間には（ 12 ）式に見られるように許容水位上昇速度の
1/2 （$1/2H_c$）で流入量による水位上昇速度に追いついていくということが分かった。

令和 5 年 1 月掲載